Хорошо было бы сказать пару слов про обобщения этой задачи на n-мерных простых многогранниках.

Gk – Количество k-мерных граней простого многогранника «P».

Gk\_i – Количество k-мерных граней простого многогранника «P», где в каждой k-мерной грани, количество граней размерности (k-1) ровно «i»

Общим обобщением задачи будет, если будем считать, что многогранник относится к классу m если max(Gk\_i)=m

для конкретного «k», и этим «k» может быть любое число от 2 до (n-1).

Но в нашем случае, более прямым обобщением получается, когда, как и в изначальной задаче k=2. То есть max(G2\_i)=m

Полное решение общего обобщения, конечно это серьёзная тема, но мы постараемся дать хотя бы некие предварительные оценки простых многогранников, для max(G2\_i)=m

Оценка в основном будет опираться на тождества (n-1)∙G1=∑{i=3\_s}{i∙f(i)}; G2=∑{i=3\_s}{f(i)}

на уравнения Дена-Соммервиля, и на то что в простых многогранниках 2\*G1=n\*G0

Для n=4

Из уравнения Дена-Соммервиля следует:

G1-2\*G2+3\*G3-4=G3-4 :-> G1+2\*G3=2\*G2

3\*G1=∑{i=3\_s}{i\*f(i)}; G2=∑{i=3\_s}{f(i)}; 6∙G2-3∙G1=6\*G3 :->

∑{i=3\_s}{(6-i)\*f(i)}=6\*G3; G3≥5 :-> ∑{i=3\_s}{(6-i)\*f(i)}≥30

Отсюда следует что, когда «m» меньше 5 для n=4 нету решений.

А дальше надо разбираться, но факт что max(G2)≤(7m-10)

n=5

G1-2\*G2+3\*G3-4\*G4+5=G4-5; G1+3\*G3=2\*G2+5\*G4-10;

G2-3\*G3+6\*G4-10=G3-4\*G4+10; 4\*G3=G2+10\*G4-20; 2\*G1+2\*G3=3\*G2; 4G1=5G2-10\*G4+20

4\*G1=∑{i=3\_s}{i\*f(i)}; G2=∑{i=3\_s}{f(i)}; 6\*G2-4\*G1=4\*G3; 5G2-4\*G1=10\*(G4-2)

∑{i=3\_s}{(6-i)\*f(i)}=4\*G3;

∑{i=3\_s}{(5-i)\*f(i)}=10\*(G4-2)≥40

и дополнительно из уравнений G1+3\*G3=2\*G2+5\*G4-10; и 4\*G3=G2+10\*G4-20 получаем что

5\*G3=G1+15\*G4-30; G4≥6; G1=5\*G0/2≥15 :-> 5\*G3≥15+15\*6-30=75 :-> G3≥15 :-> ∑{i=3\_s}{(6-i)\*f(i)}=4\*G3≥60 :-> 6m≥60;

Но основную нижнюю оценку «» даёт следующее неравенство

∑{i=3\_s}{(5-i)\*f(i)}=10\*(G4-2)≥40 :-> 3m>40 :-> m≥14

И в итоге получаем что, когда «m» меньше 14 для n=5 нет решений.

Ну и естественно max(G2)≤(5m-20)

И также можно продолжить и для остальных «n», и в принципе можно дать некие оценки и для общего случая.

Но для этого наверно лучше использовать некие программы, а так вручную и с ходу, могу заметить ещё что у нас всегда получается

∑{i=3\_s}{(k-i)\*f(i)}=tn\*G3 и когда n<8 :-> k=6, но когда n≥8 :-> k>6

N=6

(2/3)\*G1+G3+G5=G2+G4

G1+3\*G3+4\*G5=2\*G2+4\*G4

G2-3\*G3+6\*G4-10\*G5+15=G4-5\*G5+15; 3\*G3+5\*G5=G2+5\*G4

5\*G1+3\*G3=6\*G2

5\*G1=∑{i=3\_s}{i\*f(i)}; G2=∑{i=3\_s}{f(i)}; 5\*G1+3\*G3=6\*G2

∑{i=3\_s}{(6-i)\*f(i)}=6\*G3

N=7

(5/7)\*G1+G3+G5+2=G2+G4+G6;

G1+3\*G3+5\*G5+14=2\*G2+4\*G4+7\*G6

G2-3\*G3+6\*G4-10\*G5+15\*G6-21=G5-6\*G6+21; 3\*G3+11\*G5+42=G2+6\*G4+21\*G6

G3-4\*G4+10\*G5-20\*G6+35=G4-5\*G5+15\*G6-35; G3+15\*G5+70=5\*G4+35\*G6

12\*G3+10\*G5=5\*G2+15\*G4; 3\*G1+6\*G3+4\*G5=5\*G2+6\*G4;

25\*G1+34\*G3+20\*G5=35\*G2+30\*G4

25\*G1+10\*G3=25\*G2; 5\*G1+2\*G3=5\*G2

∑{i=3\_s}{(6-i)\*f(i)}=12\*G3/5

N=8

(3/4)\*G1+G3+G5+G7=G2+G4+G6;

G1+3\*G3+5\*G5+6\*G7=2\*G2+4\*G4+6\*G6

G2-3\*G3+6\*G4-10\*G5+15\*G6-21\*G7+28=G6-7\*G7+28; 3\*G3+10\*G5+14\*G7=G2+6\*G4+14\*G6

G3-4\*G4+10\*G5-20\*G6+35\*G7-56=G5-6\*G6+21\*G7-56; G3+9\*G5+14\*G7=4\*G4+14\*G6

3.5\*G1+3\*G3+G5=4\*G2+2\*G4; 2\*G3+G5=G2+2\*G4;

1.5\*G1+G3=3\*G2; 3\*7\*G1+14\*G3=6\*7\*G2

∑{i=3\_s}{(14-i)\*f(i)}=14\*G3/3