Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Лицей №2 Краснооктябрьского района Волгограда»

Балтийский научно-инженерный конкурс

Исследовательская работа на тему:
«Тетраэдризация выпуклых многогранников»

Выполнили:
Никаноров Кирилл Владимирович
и
Таранчук Владимир Александрович
Учитель геометрии: Андреенкова Наталья Леонидовна
Научный руководитель: Лецко Владимир Александрович

Волгоград, 2017

Оглавление

Оглавление 2
Введение 3
Глава 1. Нахождение минимального возможного числа тетраэдров, на которое можно разделить данный многогранник 4
Глава 2. Деление многогранников на тетраэдры «особым» способом 11
Литература 16

Введение

Цель работы – исследование разбиения выпуклых многогранников на тетраэдры.

Цель обусловила **задачи**:

1. Нахождение минимального возможного числа тетраэдров, на которое можно разделить многогранники с заданными характеристиками.
2. Разбиение многогранников на тетраэдры “особым” способом (описан ниже), а также нахождение всех возможных значений количества тетраэдров при делении данным способом.

В процессе исследования использовалась система компьютерной математики *maple*.

Отметим, что наша задача не является задачей абстрактной теории многогранников. Например, для нас имеет значение то обстоятельство, что четыре вершины, не лежащие в одной грани, могут лежать в одной плоскости. В то же время многогранники, обладающие изоморфными графами и являющиеся одновременно проективно-эквивалентными, обладают аналогичными разбиениями.

Обозначим через v, f и e количество вершин, граней и ребер многогранника, соответственно.

Теорема Эйлера. Для произвольного многогранника справедливо равенство $v - e + f = 2$ и два следствия из него: $v \leq 2f - 4$, $f \leq 2v - 4$. Эти три соотношения являются необходимыми и достаточными условиями существования многогранника с заданными значениями v, f и e.

Вектором граней многогранника M называется упорядоченный набор $g(M) = (g_3, g_4, \ldots, g_s)$, где g_k - количество k-угольных граней M. Аналогично, вектором вершин многогранника M называется упорядоченный набор $w(M) = (w_3, w_4, \ldots, w_t)$, где w_k - количество вершин степени k. Очевидно, что каждый из этих векторов однозначно определяет характеристики v, e и f.

Теорема Штейница. Граф любого выпуклого многогранника является планарным и 3-связным. Обратно: любой планарный 3-связный граф является графом выпуклого многогранника.

Очевидно, что любой многогранник можно разрезать на тетраэдры. Достаточно взять произвольную точку внутри многогранника за общую вершину тетраэдров и триангулировать все грани. Обозначим через $T(M)$ минимальное количество тетраэдров, которое можно получить из данного многогранника.

Глава 1. Нахождение минимального возможного числа тетраэдров, на которое можно разделить данный многогранник

Очевидно, что любой многогранник можно разрезать на тетраэдры, например, взяв произвольную точку внутри многогранника и затем триангулировать все грани. Мы получим разделение многогранника на тетраэдры, соединив точку с вершинами триангуляции.

Минимальное количество тетраэдров, на которые может быть разбит многогранник M, не определено однозначно: ни количеством вершин; ни количеством вершин и граней (а значит, и ребер); ни вектором граней; ни вектором ребер. Например, для десятиугольной бипирамиды $T(M) = 10$. В то время как для икосаэдра (имеющего то же вектор граней) $T(M) = 15$.

Для получения примера многогранников с разными значениями $T(M)$ при одинаковых векторах вершин достаточно рассмотреть шестиугольную призму и 12-вершинный многогранник, получаемый при сечении семиугольной призмы, проходящем через ребро нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Каждый из этих многогранников имеет по 12 вершин степени 3. Однако для первого из этих многогранников $T(M) = 10$, а для второго – 9.

Мы делим многогранник произвольным способом так, чтобы получить минимальное число тетраэдров. Очевидно, что если для многогранника N – есть минимум числа тетраэдров, тогда для него достижимо любое натуральное число тетраэдров, начиная с N(тетраэдр всегда можно разделить на два других и т. д.).

Известно, что никакой многогранник не может быть разрезан на менее чем $v - 3$ тетраэдра. В то же время, для каждого v существует многогранник, который может быть разрезан на $v - 3$ тетраэдра. Очевидным примером таких многогранников служат пирамиды. Другой пример – многогранники с вектором граней $g(M) = (2, s - 3, 0, \dots, 0, 2)$.

Докажем границу $T(M) \geq v - 3$.

Будем собирать многогранник из уже разрезанных тетраэдров (в обратную сторону) так, чтобы добавляемый тетраэдр всякий примыкал к уже собранной части многогранника, по крайней мере, одной гранью (или двумерной частью грани). Если все четыре вершины первого тетраэдра являются вершинами исходного многогранника, то имеет место соотношение $T(M) = v - 3$. Если следующий тетраэдр имеет одну общую грань с уже собранным многогранником, равенство сохраняется. Если таких граней более одной, равенство может превратиться лишь в неравенство $T(M) > v - 3$, но не в противоположное. Если новый тетраэдр соприкасается с уже собранным многогранником лишь частью грани, несовпадающие вершины в плоскости этих граней не могут одновременно быть вершинами исходного многогранника. Таким образом, многогранник не может быть разрезан на менее чем $v - 3$ тетраэдров.

При достаточно больших v: каждый многогранник может быть разрезан на не более, чем $2v - 10$ тетраэдров; существуют многогранники, которые нельзя разрезать на меньшее число тетраэдров.

Докажем границу $2v - 10$. Пусть h_i - число сторон $i-$й грани. Произвольным образом триангулируем каждую грань. Число получившихся треугольников равно.

$T = \sum_{i=1}^{f}(h_i - 2) = \sum_{i=1}^{f} h_i - 2f = 2e - 2f = 2v - 4$

Выберем произвольную точку O, лежащую строго внутри многогранника. Соединив точку O с вершинами триангуляции, получим разбиение многогранника на $T = 2v - 4$ тетраэдра.

Если точка O лежит в вершине многогранника, то $\sum_i(h_i - 2)$ тетраэдров разбиения получатся вырожденными, где g_i – число сторон у граней, инцидентных вершине, поэтому многогранник разбивается на $T_v = 2v - 4 - \sum_i(h_i - 2)$ тетраэдров.

Теперь оценим минимаксное значение $\sum_i(h_i - 2)$ для многогранника, имеющего v вершин, то есть, минимум максимальных значений по всем v-вершинным многогранникам.

Сумма значений $\sum_i(h_i - 2)$ по всем вершинам равна $\sum_{j=1}^{v}\sum_i(h_i - 2) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{e}} \mathrm{h}_\mathrm{i}^2 - 4\mathrm{e}$, поэтому $max\sum_i(h_i - 2) \geq \frac{\sum_{i=1}^{f} h_i^2 - 4e}{e}$.

Так как $\sum_{i=1}^{\mathrm{f}} \mathrm{h}_\mathrm{i} = 2\mathrm{e}$, а минимум суммы квадратов достигается, когда все h_i равны, то $\mathrm{h}_\mathrm{i} \cong \frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{f}}$.

Следовательно, $minmax \geq \frac{f\left(\frac{2e}{f}\right)^2 - 4e}{v} = \frac{4e(e-f)}{vf} = \left(\frac{4v-8}{f} + 4\right)\frac{v-2}{v}$ (1)

Если v задано, то выражение (1) минимально, когда f максимально, то есть, когда все грани – треугольные, $f \leq 2f - 4$.

$minmax \leq \left(\frac{4v-8}{2v-4} + 4\right)\frac{v-2}{v} = 6 - \frac{12}{v}$.

$$T_v = 2v - 4 - minmax \leq 2v - 10 + \frac{12}{v}$$

Мы определили минимальное количество тетраэдров $T(M)$, на которые можно разбить многогранники, относящиеся к определенным классам. Так, для пирамид очевидно $T(M) = v - 3$. Нами получены следующие результаты:

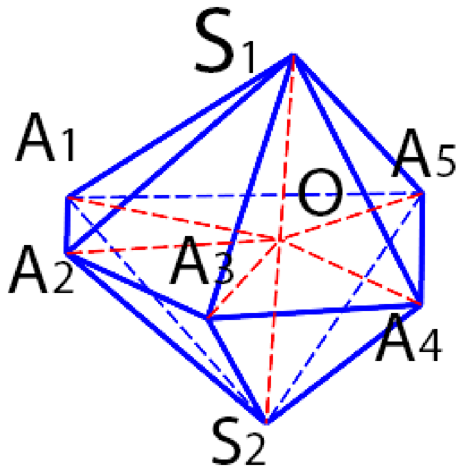


Рис. 1. 5-угольная бипирамида

Для бипирамид $T(M) = v - 2$

Многогранник необходимо разрезать так, чтобы получить минимальное число тетраэдров, как «пирог»: $A_1A_2S_1S_2, \dots A_iA_{i+1}S_1S_2$, $A_nA_1S_1S_2$. За исключением случая $v = 5$ (треугольная бипирамида), где минимум равен 2. Очевидно, что другие разрезания не улучшат данное значение.

Для призм $T(M) = (5v - 20)/4$, если число сторон основания четно и $T(M) = (5v - 18)/4$, если число сторон основания нечетно. Докажем этим оценки.

Пусть при $n \geq 3$ дана n-угольная призма P, которая разрезана на тетраэдры. Количество тетраэдров, примыкающих к верхнему основанию не меньше, чем $n - 2$. Аналогично, и тетраэдров, примыкающих к нижнему основанию не меньше, чем $n - 2$. Понятно, что суммарный объём всех тетраэдров, примыкающих к верхнему основанию не больше, чем треть объёма призмы P. Также и суммарный объём всех тетраэдров, примыкающих к нижнему основанию не больше, чем треть объёма призмы P. Следовательно, существует, по крайней мере, один тетраэдр, не примыкающий своими гранями ни к верхнему, ни к нижнему основанию. Таким образом, доказана оценка

$$T_n \geq 2n - 3. \qquad (2)$$

Указанные выше разбиения призм при $n = 3{,}4$ дают точные значения $T_3 = 3,\ T_4 = 5$.

Пусть теперь $n \geq 5$. При чётном n разобьём верхнее основание n – угольной призмы$A_1 A_2 \dots A_n$диагоналями $A_2 A_{n-1}, A_3 A_{n-2}, \dots, A_{\frac{n}{2}-1} A_{\frac{n}{2}+2}$ на $(\frac{n}{2} - 1)$ четырёхугольников. Через эти диагонали проведём плоскости, перпендикулярные основанию. Получим разбиение призмы на $\left(\frac{n}{2} - 1\right) -$ ну четырёхугольную призму, каждую из которых, в свою очередь, разбиваем на пять тетраэдров. В результате получим разбиение n – угольной призмы на $\frac{5n-10}{2}$ тетраэдров.

При нечётном n разобьем верхнее основание n – угольной призмы $A_1 A_2 \dots A_n$ диагоналями $A_2 A_{n-1}, A_3 A_{n-2}, \dots, A_{\frac{n-1}{2}} A_{\frac{n+3}{2}}$ на $\frac{n-3}{2}$ четырёхугольника и один треугольник. Через эти диагонали проведём плоскости, перпендикулярные основанию. Получим разбиение призмы на $\frac{n-3}{2}$ четырёхугольные призмы, каждую из которых, в свою очередь, разбиваем на пять тетраэдров, и одну треугольную призму, которую разбиваем на три тетраэдра. В результате получим разбиение n – угольной призмы на $\frac{5n-9}{2}$ тетраэдра.

Построенные разбиения дают оценку

$$T_n \leq \begin{cases} \frac{5n-10}{2} \text{ при чётном } n, \\ \frac{5n-9}{2} \text{ при нечётном } n. \end{cases} \qquad (3)$$

Из оценок (2) и (3) при $n = 6$ следует, что

$$9 \leq T_6 \leq 10.$$

Предположим, $T_6 = 9$. Из проведённых выше соображений следует, что тетраэдров, примыкающих к верхнему основанию, ровно четыре, и тетраэдров, примыкающих к нижнему основанию, ровно четыре. И есть ещё один тетраэдр B, не примыкающий гранями ни к верхнему, ни к нижнему основанию – его объём в три раза меньше объёма призмы. Две вершины тетраэдра B лежат на верхнем основании призмы, а две другие – на нижнем основании (иначе, двугранные углы при рёбрах сторон граней тетраэдров, лежащих в одном основании, полностью заполняли всю примыкающую область к основанию и двугранные углы при сторонах основания призмы, что невозможно). Объём тетраэдра B равен $V = \frac{1}{6} abhsin\gamma$, где a – длина ребра, лежащего на верхнем основании, b – длина ребра, лежащего на нижнем основании, $\gamma -$ угол между этими рёбрами, а $h -$расстояние между рёбрами, равное высоте призмы. Объём призмы равен $V_P = Sh$, где S – площадь основания. Так как $V_P = 3V$, то из этого следует

$S = \frac{absin\gamma}{2}$. (4)

Можно считать, что в основании лежит правильный шестиугольник со стороной c (если это не так, то рассмотрим правильную призму с соответствующим разбиением на тетраэдры, при этом исходные тетраэдры, примыкающие к основаниям, не смогут перейти в вырожденные тетраэдры, а также тетраэдр B переходит в невырожденный тетраэдр – ведь, его объём должен равняться одной третей объёма призмы). Тогда площадь правильного шестиугольника со стороной c равна $S = 3c^2\sqrt{3}$. Длина каждого из рёбер a и b не превосходит длины наибольшей диагонали правильного шестиугольника: $a \leq 2c, b \leq 2c$.Так что $3c^2\sqrt{3} = S = \frac{absin\gamma}{2} \leq \frac{2c \cdot 2c}{1} = 2c^2$. Противоречие. Мы доказали, что $T_6 = 10$.

Абсолютно тот же подход приводит к равенству $T_5 = 8$.

При $n \geq 7$ для оценки снизу необходим более детальный анализ. Далее рассмотрим триангуляцию t_n – угольной призмы P_n тетраэдрами. Рассмотрим сечение призмы плоскостью α , параллельной плоскостям оснований, и делящей высоту призмы пополам. При пересечении тетраэдра триангуляции t плоскостью α в сечении может получиться:

в случае, если три вершины тетраэдра лежат в одном основании, а четвёртая – в другом – треугольник (обозначим через Y множество таких треугольников, заметим, что их количество равно $2n - 4$),

в случае если две вершины тетраэдра лежат в верхнем основании, а две – в нижнем – четырёхугольник.

Так что в сечении плоскостью α мы получим $n-$ угольник $M_{\frac{1}{2}}$, разбитый на треугольники, в количестве m_3 :

$m_3 = 2n - 4,$ (5)

И четырёхугольники, в количестве m_4, так что $m_3 + m_4 = m$. Каждый полученный четырёхугольник диагональю разобьём на два треугольника. В результате получим триангуляциюn– угольника $M_{\frac{1}{2}}$, состоящую из $m_3 + 2m_4$ треугольников. Причём на границе, кроме вершин n– угольника $M_{\frac{1}{2}}$, ещё и середины его сторон являются вершинами триангуляции. Пусть внутри n– угольника $M_{\frac{1}{2}}$ находится k вершин. Тогда из формулы Эйлера следует $m_3 + 2m_4 = 2n - 2 + 2k$. С учётом (5), получаем

$m = m_3 + m_4 = 2n + k - 3.$ (6)

Оценим снизу количество k внутренних вершин триангуляции.

Рассмотрим множество V тех внутренних вершин, которые являются вершинами треугольников из множества Y. Пусть во множестве Yl_2 тех, которые имеют по две стороны на границе $n-$ угольника $M_{\frac{1}{2}}$, l_1 тех, которые имеют ровно одну сторону на границе $n-$ угольника $M_{\frac{1}{2}}$ и l_0 тех, которые не имеют сторон на границе $n -$ угольника $M_{\frac{1}{2}}$. Общее количество равно $2n - 4$, так что

$l_0 + l_1 + l_2 = 2n - 4.$ (7)

Только треугольники из множества Y могут иметь стороны на границе n – угольника $M_{\frac{1}{2}}$, поэтому имеем

$l_1 + 2l_2 = 2n.$ (8)

Если точка K из множества V является вершиной только тех треугольников, которые имеют ровно одну сторону на границе $n-$ угольника $M_{\frac{1}{2}}$, то это возможно только, если они соответствуют тетраэдрам с гранями на верхнем основании и поэтому должны иметь общую грань, следовательно, их максимум два, и максимум два таких же соответствующих тетраэдрам с гранью на нижнем основании и имеющим общую грань.

Рис. 2.

Если точка K из множества V является вершиной только техтреугольников, которые не имеют сторон на границе $n -$ угольника $M_{\frac{1}{2}}$, то это возможнотолько, если они соответствуют тетраэдрам с гранями на разных основаниях, поэтому их максимум два

Рис. 3.

Может быть и такая вершина, в которой сходятся два треугольника, которые имеют ровно по одной стороне на границе $n-$ угольника $M_{\frac{1}{2}}$, и они соответствуют тетраэдрам с гранями на одном основании, и треугольник, который не имеют сторон на границе n – угольника $M_{\frac{1}{2}}$, но он соответствует тетраэдру с гранью на другом основании.

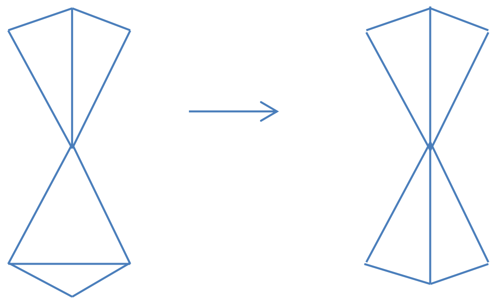


Рис. 4.

Тогда можно заменить два тетраэдра, соответствующих нижнему фрагменту, на два соответствующих правому. Тогда общее количество вершин триангуляции не изменится. И условия (7) и (8) также не нарушатся.

Получается, что каждая вершина треугольника, который имеет ровно одну сторону на границе n – угольника $M_{\frac{1}{2}}$ идёт в общий счёт с весом не меньшим, чем $\frac{1}{4}$, а каждая вершина треугольника, который не имеет сторон на границе n – угольника $M_{\frac{1}{2}}$ идёт в общий счёт с весом не меньшим, чем $\frac{1}{2}$. Таким образом, общее количество внутренних вершин k допускает оценку снизу:

$$k \geq \frac{l_1}{4} + \frac{l_0}{2}$$

А с учётом (7) и (8) имеем

$$\frac{l_1}{4} + \frac{l_0}{2} = \frac{1}{4}(l_1 + 2l_0) = \frac{1}{4}\big(2(l_0 + l_1 + l_2) - (l_1 + 2l_2)\big) = \frac{1}{4}(2(2n-4) - 2n) = \frac{n}{2} - 2.$$

Так что, $k \geq \frac{n}{2} - 2$. А из (6) получаем $m \geq \frac{5n}{2} - 5$. При нечётных n уточняем оценку: $m \geq \frac{5n+1}{2} - 5$.

А с учётом оценки окончательно получаем

$$T_n = \begin{cases} \dfrac{5v-20}{4} \text{ при чётном } n, \\ \dfrac{5v-18}{4} \text{ при нечётном } n. \end{cases}$$

Для дельтоэдров $T(M) = v - 2$. За исключением случая, когда в качестве дельтоэдра рассматривается куб (для которого $T(M) = v - 3$).

Разбиение на $v - 2$ тетраэдра получается, если за общую вершину всех тетраэдров принять одну из двух вершин дельтоэдра, имеющих степень $(v-2)/2$. Улучшение для куба проходит за счет того, что для него $(v-2)/2 = 3$.

Для антипризм мы получили неравенство $T(M) \leq 3v/2 - 5$ (за общую вершину тетраэдров разбиения достаточно принять любую вершину антипризмы). По крайней мере, для значений $v \leq 10$ это неравенство не улучшаемо.

Для икосаэдра $T(M) = 15$. Достаточно разрезать икосаэдр на две пятиугольные пирамиды и пятиугольную антипризму. Другой способ - принять любую из вершин икосаэдра за общую вершину тетраэдров.

Для додекаэдра $T(M) \leq 23$. Для разрезания додекаэдра на 23 тетраэдра можно сначала отрезать от него 8 тетраэдров, вершины которых образуют максимальное независимое множество в графе додекаэдра. В оставшемся многограннике можно принять любую из вершин за общую вершину тетраэдров. Существуют и другие способы разрезания додекаэдра на 23 тетраэдра.

Глава 2. Деление многогранников на тетраэдры «особым» способом.

Опишем «особый» способ тетраэдризации многогранников: проведём сечение через 3 произвольно взятых вершины, не лежащих ни в одной из граней. На выходе получается два многогранника (заметим, что всегда выпуклых), которые в свою очередь делим по тем же правилам до тех пор, пока это не станет невозможно (в таком случае каждый оставшийся многогранник может быть только тетраэдром). После того, как мы разделили многогранники на два других, мы делим их независимо друг от друга (т. е. растаскиваем их и делим отдельно каждый).

Описанный способ является наиболее естественным при переходе из плоскости в 3-ёх мерное пространство. На плоскости всё очевидно, для n - угольника можно получить $n - 2$ треугольников. Но в нашем случае не всё так просто. Возникает вопрос, конечен ли данный процесс. Ответ на этот вопрос представлен ниже. Обозначим через $S(M)$ множество достижимых значений количеств тетраэдров при разрезании данным способом. Для такого типа вполне естественно, что могут возникать новые вершины (см. рис. 5).

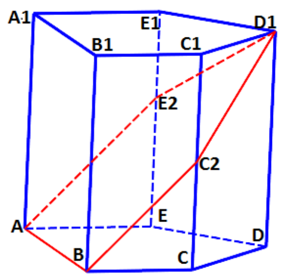


Рис. 5. 5-угольная призма

Рассмотрим подкласс пирамид. Мы можем проводить сечение только через её вершину и две любых вершины, не образующих сторону и лежащих в основании. Ситуация похожа на ситуацию для плоскости и число тетраэдров для n – угольной пирамиды равняется $v-3$.

Рассмотрим фигуру, называемую тетрагональным антиклином (tetragonal antiwedge).

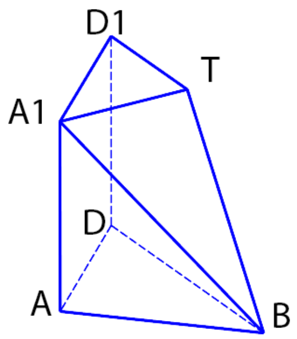
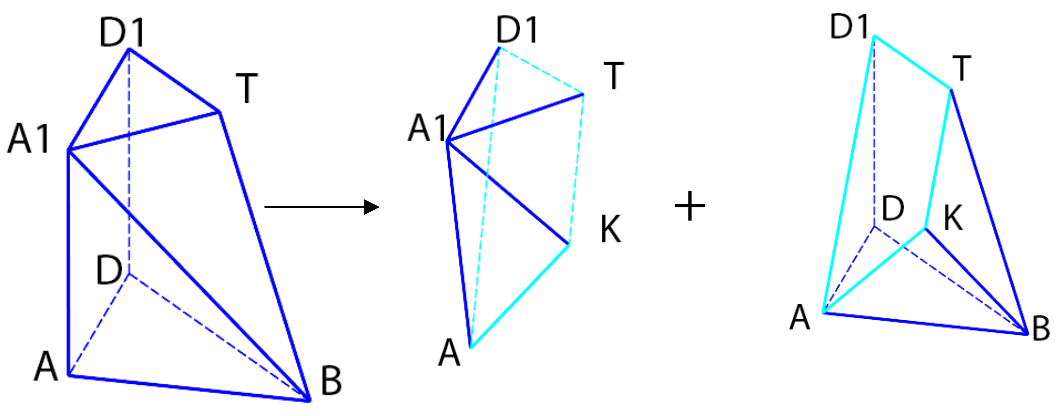


Рис. 6. Тетрагональный антиклин

Всего у него 6 граней, 6 вершин и соответственно 10 рёбер (заметим, что это один из простейших многогранников). $g(M) = w(M) = (4,2)$.

Для данной фигуры строго доказано, что возможное число тетраэдров есть любое нечётное число, начиная с трёх, При некотором разрезании нашим способом этот многогранник распадается на четырехугольную пирамиду и новый тетрагональный антиклин. Это самая простая фигура, из которой может получаться бесконечное число тетраэдров, что доказывает, что процесс деления может не заканчиваться. Следовательно, любая фигура, из которой можно получить антиклин, может не разделиться на тетраэдры. Покажем, как эта фигура переходит в себе подобную.



И так далее

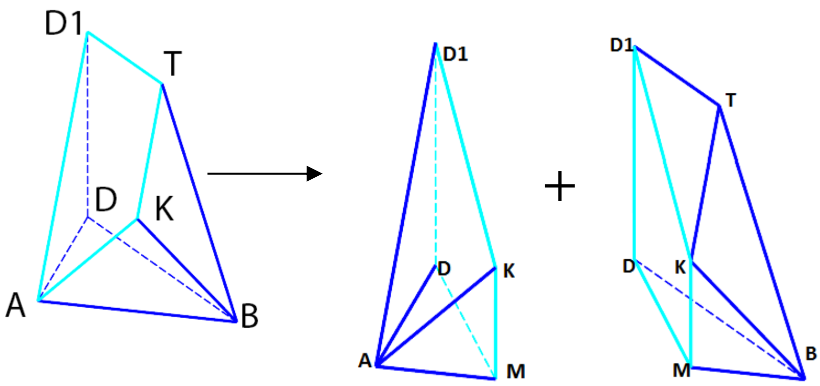


Рис. 7. Способ бесконечного деления антиклина

Получается антиклин и 4-угольная пирамида. При рассмотрении других сечений также получатся только нечётные значения количеств тетраэдров. А сам антиклин можно разрезать минимально на 3 тетраэдра (заметим, что эта оценка совпадает с $v-3$). Таким образом, $S(M) = \{1 + 2n|\ n \in N\}$

Покажем, что из этой фигуры получаются только нечётные количества тетраэдров. Для начала оценим количество сечений: $\binom{v}{3} - \sum_{i=3}^{v} g_i \binom{\mathrm{i}}{3}$. У антиклина всего 8 возможных сечений. Два из них всегда приводят к антиклину и четурехугольной пирамиде: $(AD1T)$ и (ADT). $(A1DT)$ и $(ABD1)$ дают тетраэдр и треугольную бипирамиду, т.е. 3 (или 5) тетраэдров. $(A1BD1)$ и $(A1DB)$ дают тетраэдр и четырехугольную пирамиду т.е. 3 тетраэдра. (ABT) и $(AA1T)$ дают призму и 4-угольную пирамиду т.е. 5 тетраэдров. Таким образом, из антиклина можно получить только нечётное число тетраэдров

Это не единственная фигура, для которой процесс может не заканчиваться. Рассмотрим их в дальнейшем. Намного проще рассмотреть класс фигур, для которых этот процесс конечен. На наше удивление, их оказалось не так много.

Треугольная призма – $S(M) \ = \ \{3\}$

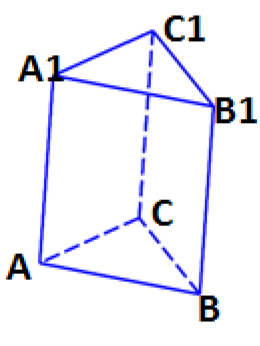


Рис. 8. Треугольная призма

Для пирамид $S(M) = \{v - 3\}$

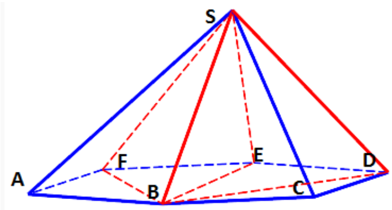


Рис. 9. 6-угольная пирамида

Для треугольных бипирамид – $S(M) = \{2{,}4\}$

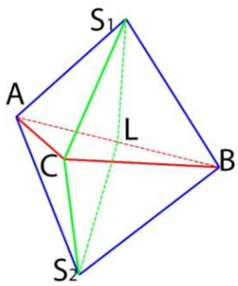


Рис. 10. Треугольная бипирамида

Для четырёхугольных бипирамид особого типа – $S(M) = \{4\}$

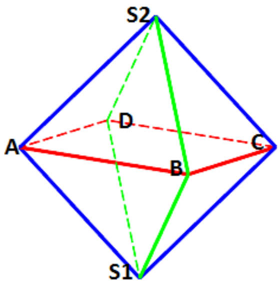


Рис. 11. Четырёхугольная бипирамида

Разными цветами выделены возможные варианты сечений (чтобы 4 вершины, взятые как указано на рисунке лежали в одной плоскости).

Также мы рассмотрели некоторые известные фигуры и получили для них серию возможных количеств тетраэдров:

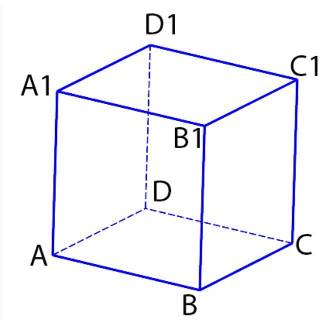


Рис. 12. Куб

Куб – $S(M) = \{6\} \cup \{3 + 2n \mid n \in N\}$ После отсечения одного угла у куба из него можно получить антиклин

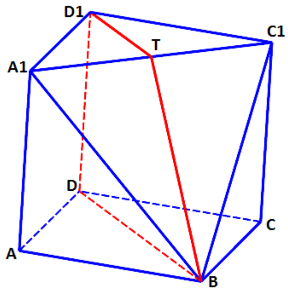


Рис. 13. Куб - антиклин

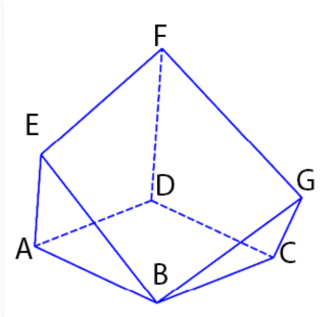


Рис. 14. $g(M) = (2, 4)$

$S(M) = \{4\} \cup \{3 + 2n \mid n \in N\}$, заметим, что число 5 достижимо только в случае, если два противоположных вертикальных ребра, не лежащих в одной грани, лежат в одной плоскости.

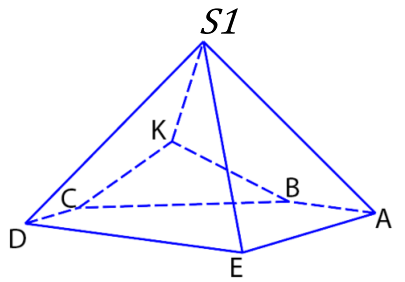


Рис. 15. $g(M) = (3, 2, 1)$

$S(M) = \{2 + 2n \mid n \in N\}$

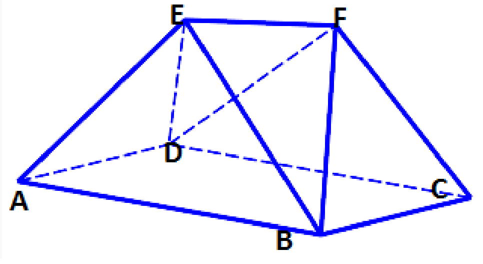


Рис. 16. $g(M) = (6, 1), w(M) = (2, 4)$

$S(M) = \{1 + 2n \mid n \in N\}$

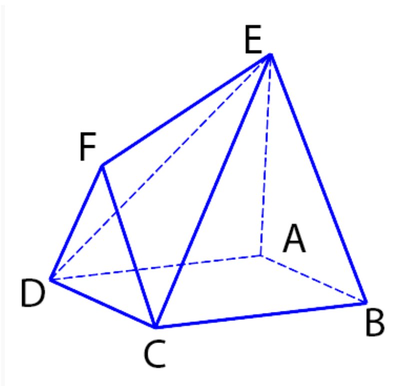


Рис. 17. $g(M) = (3,2,1), w(M) = (3,2,1)$

$S(M) = \{3,5\} \cup \{6 + n \mid n \in N\}$

У последнего многогранника в $S(M)$ входят все натуральные числа, начиная с 7. Для многогранников с большим количеством ребер этот случай наиболее типичен.

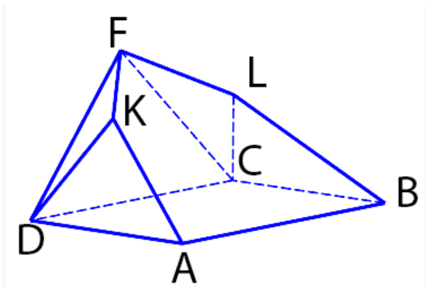


Рис. 18. $g(M) = (5,1,1), w(M) = (4,3)$

$S(M) = \{3 + n \mid n \in N\}$

Таким образом, нам удалось выделить 3 класса многогранников:

1. $S(M)$ конечно.
2. $S(M)$ бесконечно, но дополнение до N тоже бесконечно (Например, когда заполняются только чётные или нечётные значения).
3. $S(M)$бесконечно, дополнение до N конечно.

Нам не известен ответ на вопрос существуют ли такие многогранники, которые нельзя тетраэдризировать нашим способом.

Литература

1. B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, 2nd edition, Springer, 2003.
2. D. D. Sleator, R. E. Narjan, W. P. Thurston, *Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry*, Journal of the American Mathematical Society, V1, №3, 1988, P. 647-681.