О. Полубасов. 12.03.12

========= 159 ==========

MM159 (6 баллов)

Для натурального числа n, большего 1, обозначим через qu(n) отношение суммы количеств единиц во всех записях числа n в системах счисления с натуральными основаниями, большими 1, к самому числу n.
Найти наибольшее и наименьшее значение qu(n)
и предел qu(n) при n, стремящемся к бесконечности.
Конечны ли множества чисел, для которых qu(n): меньше 1; больше 1; равно 1?

Сразу отметив, что qu(2) = ½, в дальнейшем n=2 рассматривать не будем, чтобы каждый раз не оговаривать это отдельно.

Пусть S(n) - сумма количеств единиц во всех записях числа n в системах счисления с натуральными основаниями, большими 1.

По определению, qu(n) = S(n)/n.

При основании g > n записи чисел состоят из одной цифры, не равной 1, и поэтому нас не интересуют.

Пусть $S_1(n)$ – количество g, таких что запись числа n по основанию g заканчивается на 1, то есть n = xg + 1. Тогда g является делителем n-1, не равным 1. Следовательно, $1 \le S_1(n) \le 2\sqrt{n-1}-1$.

Пусть $S_2(n)$ – количество g, таких что $n = 1x_{(g)}$, x < g (запись состоит ровно из двух цифр), тогда $\lfloor n/2 \rfloor + 1 \le g \le n$, $S_2(n) = \lceil n/2 \rceil$.

Если запись числа n по основанию g содержит более 2 цифр, то $2 \le g \le \sqrt{n}$. Количество цифр в записи равно $\lfloor \log_g n \rfloor + 1$, но возможная 1 в младшем разряде уже учтена в S_1. Пусть $S_3(n)$ – суммарное количество единиц (без учёта единиц в младшем разряде) во всех таких записях числа n, тогда $0 \le S_3(n) \le \lfloor \log_2 n \rfloor * \left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1\right)$.

Учитывая, что $S(n) = S_1(n) + S_2(n) + S_3(n)$, получаем для S(n) оценки снизу и сверху:

$$\lceil n/2 \rceil + 1 \le S(n) \le \lceil n/2 \rceil + 1 + (\lfloor \log_2 n \rfloor + 2) * \left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1\right).$$

Любопытно, что при n = 3 и при n = 7 верхняя оценка действительно достигается.

Разделив на n и перейдя к пределу, получим:

$$\frac{1}{2} \le \lim_{n\to\infty} qu(n) \le \frac{1}{2}$$

Теперь ясно, что наименьшее значение qu(n) достигается на единственном числе n = 2, и что множество чисел, для которых qu(n) меньше 1, бесконечно, а два других множества конечны. Было бы неплохо узнать эти множества, да и максимальность qu(7) надо подтвердить доказательно.

Для выяснения этого вопроса оценка qu(n) сверху (хоть и точная) слишком груба, воспользуемся более тонкой оценкой:

$$S(n) \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2\left\lfloor \sqrt{n-1} \right\rfloor - 1 + \sum_{g=2}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \left\lfloor \log_g n \right\rfloor$$

Требуется найти все решения неравенства S(n) ≥ n. Для этого сначала найдём все решения неравенства

$$2\left\lfloor \sqrt{n-1} \right\rfloor - 1 + \sum_{g=2}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \left\lfloor \log_g n \right\rfloor \ge n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

а затем отфильтруем лишнее.

Как левая, так и правая часть неравенства ступенчаты, поэтому между понятиями «точно не меньше» и «точно меньше» существует некоторая «пограничная зона» (графики могут пересекаться неоднократно). Для начала, попробуем отыскать верхнюю границу этой зоны.

интервал	$2\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor - 1$	$\lfloor\log_g n\rfloor$								**Σ**	**n**
		2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**		
32 - 35	9	5	3	0	2	-	-	-	-	19	32 - 35
36	9	5	3	0	2	2	-	-	-	21	36
37 - 48	11	5	3	0	2	2	-	-	-	23	37 – 47
49	11	5	3	0	2	2	2	-	-	25	49
50 - 63	13	5	3	0	2	2	2	-	-	27	50 – 55
64	13	6	3	1	2	2	2	1	-	30	-
65 - 80	15	6	3	1	2	2	2	1	-	32	65
81	15	6	4	1	2	2	2	1	1	34	-
82 – 99	17	6	4	1	2	2	2	1	1	36	-

Таблица 1.

Наблюдение 1. Пусть запись числа n по основанию g состоит из m цифр. Тогда суммарное количество единиц в записи числа n по основанию g и в записи числа n по основанию g^k не превышает m+1, если m = 1 (mod k), и m в противном случае.

Пример 1. $111111_{(2)} = 333_{(4)}$, в сумме 6 единиц. Любая попытка увеличить количество единиц в четверичной записи приводит к уменьшению количества единиц в двоичной: $111_{(4)} = 10101_{(2)}$, в результате сумма не уменьшается.

Пример 2. $1111111_{(2)} = 1333_{(4)}$, в сумме 8 единиц. $1111_{(4)} = 1010101_{(2)}$.

По этой причине в таб. 1 в столбцах g=4,8,9 записаны не логарифмы, а 0 или 1, в зависимости от соответствующего k.

В первом столбце таблицы записаны рассматриваемые интервалы n, а в последнем – значения n из интервала, для которых неравенство выполняется. Видно, что при n < 48 «точно не меньше», а при n > 65 – «точно меньше». Поэтому достаточно проверить только n ≤, 55 и n=65, при этом n=48 уже отсеялось.

Теперь можно приступить к фильтрации. Числа во втором столбце явно завышены, реальное количество делителей, больших 1, у n-1 гораздо меньше. В таблице 2 представлены результаты фильтрации.

n	**делителей (n-1)**	$\lfloor \log_g n \rfloor$					**Σ**
		2	**3**	**4**	**5**	**6**	
3	1	-	-	-	-	-	1
4	1	2	-	-	-	-	3
5	2	2	-	-	-	-	4
6	1	2	-	-	-	-	3
7	3	2	-	-	-	-	5
9	3	3	2	-	-	-	8
10	2	3	2	-	-	-	7
11	3	3	2	-	-	-	8
12	1	3	2	-	-	-	6
13	5	3	2	-	-	-	10
15	3	3	2	-	-	-	8
16	3	3	2	1	-	-	9
17	4	4	2	1	-	-	11
19	5	4	2	1	-	-	12
21	5	4	2	1	-	-	12
25	7	4	2	1	2	-	16
29	5	4	3	1	2	-	15
31	7	4	3	1	2	-	17
37	8	5	3	0	2	2	20

Таблица 2.

Осталось всего 19 чисел. Для такого множества подсчитать количество единиц в системах по основаниям 2-6 (без учёта единиц в младшем разряде) уже не трудно. В результате остаётся 12 чисел (таб. 3).

n	делителей (n-1)	единиц				Σ
		2	3	4	5	
3	1	-	-	-	-	1
4	1	1	-	-	-	2
5	2	1	-	-	-	3
6	1	2	-	-	-	3
7	3	2	-	-	-	5
9	3	1	1	-	-	5
10	2	2	1	-	-	5
11	3	2	1	-	-	6
13	5	2	2	-	-	9
15	3	3	1	-	-	7
21	5	2	1	2	-	10
31	7	4	2	1	2	16

Таблица 3.

qu(7) = 9/7 = 1.285714
qu(13) = 16/13 = 1.230769
qu(5) = 6/5 = 1.2
qu(9) = 10/9 = 1.111111
qu(11) = 12/11 = 1.090909
qu(31) = 32/31 = 1.032258

qu(3) = 3/3 = 1
qu(4) = 4/4 = 1
qu(6) = 6/6 = 1
qu(10) = 10/10 = 1
qu(15) = 15/15 = 1
qu(21) = 21/21 = 1

ОТВЕТ: ½ ≤ qu(n) ≤ 9/7, $\lim_{n\to\infty} qu(n) = ½$, бесконечно, 6 элементов, 6 элементов.