Конкурсная задача ММ191 (4 балла)

Рассматриваются тройки натуральных чисел , не превосходящих данного натурального числа . Каких троек больше, тех, которые могут быть длинами сторон некоторого треугольника, или остальных?

**Решение.**

Поскольку любую тройку чисел можно упорядочить по возрастанию, будем рассматривать неупорядоченные тройки. Подсчитаем количество всех различных неупорядоченных троек чисел , не превосходящих данного натурального числа . Их количество равно числу сочетаний с повторениями (поскольку среди чисел , , могут быть совпадающие) из по 3:

Теперь вычислим — количество всех различных неупорядоченных троек чисел , не превосходящих данного натурального числа , которые могут быть длинами сторон некоторого треугольника. Для того чтобы тройка чисел могла быть длинами сторон некоторого треугольника, необходимо и достаточно выполнения неравенств треугольника

Поскольку любую неупорядоченную тройку чисел можно упорядочить по возрастанию, будем считать, что . Тогда два из неравенств треугольника автоматически выполнены, и останется только одно:

Заметим, что следствием неравенств и является .

Таким образом, неравенства , выполнены тогда и только тогда, когда число меняется от 1 до , при каждом фиксированном число меняется от до (квадратными скобками обозначена целая часть числа), а число меняется от до . Количество различных вариантов равно

Поскольку

то

Для вычисления этих сумм будем использовать известные формулы:

Рассмотрим два случая.

1. Пусть число — чётное. Тогда число принимает чётные и нечётные значения вида

Поэтому

1. Пусть число — нечётное. Тогда число принимает чётные и нечётные значения вида

Поэтому

Таким образом,

Тогда

поэтому больше тех троек чисел, которые могут являться длинами сторон треугольника. Заметим, что при .

*Ответ:* больше тех троек чисел, которые могут являться длинами сторон треугольника.