ММ232. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^3 + y^3 = z^3 - i$ для каждого $i \in \{1, 2, 4\}$?

Ответ. Для $i = 1$ и для $i = 2$ бесконечно много решений, для $i = 4$ решений нет.

Решение.

Случай $\boldsymbol{i = 1}$.

Запишем уравнение в виде

$$x^3 + y^3 + 1 = z^3. \tag{1}$$

Найдём (перебором на компьютере) все натуральные решения уравнения (1), в которых $y \le x < 20000$:

x	y	z
8	6	9
138	71	144
138	135	172
426	372	505
486	426	577
720	242	729
812	791	1010
823	566	904
1207	236	1210
2292	575	2304
2820	1938	3097
3230	2676	3753
5610	1124	5625
5984	2196	6081
6702	1943	6756
8675	1851	8703
11646	1943	11664
11903	7676	12884
16806	3318	16849
17328	10866	18649

(Если в любом решении уравнения (1) поменять местами x и y, то получим новое решение уравнения (1).)

Глядя на решения, выделенные жёлтым цветом, легко заметить закономерность:

$$x = 9n^4 - 3n, \qquad y = 9n^3 - 1, \qquad z = 9n^4, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

(Самое первое решение в таблице $x = 8$, $y = 6$, $z = 9$ этой закономерности не удовлетворяет, но будет удовлетворять, если поменять местами x и y.)

Подставив формулы (2) в уравнение (1), получим тождество, значит, формулы (2) действительно задают решение уравнения (1) при всех натуральных n. Поменяв местами x и y, получим также решение уравнения (1):

$$x = 9n^3 - 1, \qquad y = 9n^4 - 3n, \qquad z = 9n^4, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, уравнение (1) имеет бесконечно много натуральных решений.

Вопрос о том, какой закономерностью описываются остальные решения уравнения (1), остаётся открытым.

Случай $i = 2$.

Запишем уравнение в виде

$$x^3 + y^3 + 2 = z^3. \qquad (3)$$

Найдём (перебором на компьютере) все натуральные решения уравнения (3), в которых $y \le x < 20000$:

x	y	z
6	5	7
47	24	49
161	54	163
383	96	385
749	150	751
1295	216	1297
2057	294	2059
3071	384	3073
4373	486	4375
5999	600	6001
7985	726	7987
10367	864	10369
13181	1014	13183
16463	1176	16465

(Если в любом решении уравнения (3) поменять местами x и y, то получим новое решение уравнения (3).)

Глядя на приведённую таблицу, легко заметить закономерность:

$$x = 6n^3 - 1, \qquad y = 6n^2, \qquad z = 6n^3 + 1, \qquad n = 1, 2, \dots \qquad (4)$$

(Самое первое решение в таблице $x = 6$, $y = 5$, $z = 7$ этой закономерности не удовлетворяет, но будет удовлетворять, если поменять местами x и y.)

Подставив формулы (4) в уравнение (3), получим тождество, значит, формулы (4) действительно задают решение уравнения (3) при всех натуральных n. Поменяв местами x и y, получим также решение уравнения (3):

$$x = 6n^2, \qquad y = 6n^3 - 1, \qquad z = 6n^3 + 1, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Таким образом, уравнение (3) имеет бесконечно много решений.

Вопрос о том, существуют ли решения уравнения (3), отличные от (4), (5), остаётся открытым.

Случай $\boldsymbol{i = 4}$.

Запишем уравнение в виде

$$x^3 + y^3 + 4 = z^3. \tag{6}$$

В этом случае компьютерный перебор свидетельствует о том, что уравнение (6) не имеет натуральных решений при $y \le x < 20000$. А это наводит на мысль, то натуральных решений вообще нет.

Докажем, что это так. Посмотрим, какие остатки от деления на 9 может иметь куб целого числа k:

k mod 9	k^3 mod 9
0	0
1	1
2	8
3	0
4	1
5	8
6	0
7	1
8	8

Таким образом, правая часть уравнения (6) может иметь остаток от деления на 9 только 0, 1 или 8. При этом левая часть уравнения (6) может иметь остаток от деления на 9 только 2, 3, 4, 5, 6 (поскольку x^3 mod 9 и y^3 mod 9 могут принимать только значения 0, 1 или 8). Поэтому равенство (6) невозможно. Уравнение (6) не имеет решений в натуральных числах.

Случай $\boldsymbol{i = 4 + 9m, i = 5 + 9m, m = 0, \pm 1, \pm 2}, \ldots$

Запишем уравнение в виде

$$x^3 + y^3 + i = z^3. \tag{7}$$

Оно не имеет натуральных (и даже целых) решений по той же причине, что и в предыдущем случае: левая часть может иметь остаток от деления на 9 только 2, 3, 4, 5, 6, 7, а правая часть — только 0, 1, 8.