ММ233. При каких значениях параметра a множество точек на плоскости, задаваемых системой

$$(x-a+1)^2+(y-3)^2 \le 80, \qquad (К_1)$$

$$(x-3)^2+(y-4a+1)^2 \le 20a^2, \qquad (К_2)$$

$$230-2a=|4x+3y+115-a|+|4x+3y-115+a|, \qquad (1)$$

является кругом?

Ответ: $\left[-20+8\sqrt{6};\ 0\right) \cup \left(0;\frac{4}{3}\right] \cup \left[12;\ 22-4\sqrt{5}\right]$.

Решение. Неравенство ($К_1$) задаёт круг радиуса $R_1=4\sqrt{5}$ с центром в точке $(a-1;3)$. Неравенство ($К_2$) задаёт круг радиуса $R_2=2|a|\sqrt{5}$ с центром в точке $(3;4a-1)$. Расстояние d между центрами кругов ($К_1$) и ($К_2$) имеет вид

$$d=\sqrt{(a-4)^2+(4-4a)^2}.$$

Рассмотрим уравнение (1). Обозначив $t=4x+3y, b=115-a,$ запишем его в виде

$$|t+b|+|t-b|=2b.$$

Решения t этого уравнения существуют только при $b \ge 0$ и представляют собой сегмент $[-b;b]$. Следовательно, уравнение (1) при $a \le 115$ задаёт на плоскости полосу

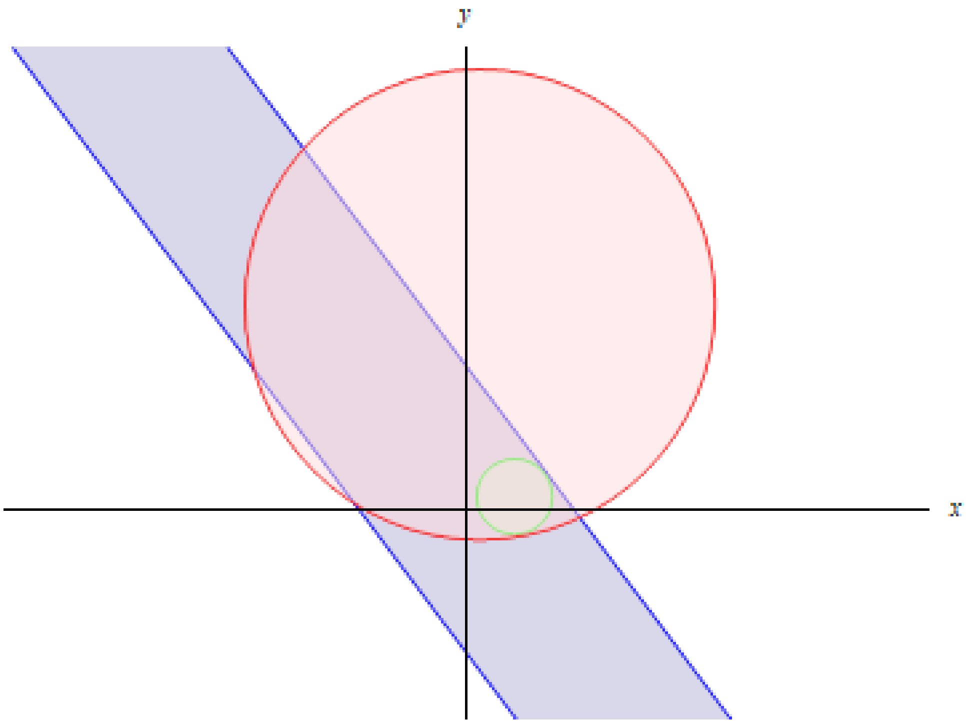
$$a-115 \le 4x+3y \le 115-a, \qquad (П)$$

заключённую между прямыми

$$4x+3y-a+115=0, \qquad (П_1)$$

$$4x+3y+a-115=0. \qquad (П_2)$$

Таким образом, система ($К_1$), ($К_2$), (1) задаёт на плоскости пересечение двух кругов и полосы. Это пересечение является кругом, если один из кругов ($К_1$), ($К_2$) вложен в другой и при этом внутренний круг целиком лежит в полосе (П):



Рассмотрим два случая.

I. Круг (K_1) вложен в круг (K_2), и при этом круг (K_1) целиком лежит в полосе (П).

Критерий того, что круг (K_1) вложен в круг (K_2): $d + R_1 \le R_2$. Подставив сюда выражения для d, R_1, R_2, получим

$$\sqrt{(a-4)^2 + (4-4a)^2} + 4\sqrt{5} \le 2|a|\sqrt{5}. \quad (2)$$

Критерий того, что круг (K_1) целиком лежит в полосе (П): центр круга (K_1) лежит в полосе (П) и при этом расстояние от центра круга (K_1) до прямых ($П_1$), ($П_2$) не менее R_1. Воспользовавшись формулой для вычисления расстояния ρ от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

получим

$$a - 115 \le 4(a-1) + 9 \le 115 - a, \quad (3)$$

$$\frac{3|a+40|}{5} \ge 4\sqrt{5}, \quad (4)$$

$$|a - 22| \ge 4\sqrt{5}. \quad (5)$$

Решение неравенства (2) имеет вид $\left(-\infty;\ -20 - 8\sqrt{6}\right] \cup [12;\ +\infty)$.

Решение неравенства (3) имеет вид $[-40; 22]$.

Решение неравенства (4) имеет вид $\left(-\infty;\ -40 - \frac{20\sqrt{5}}{3}\right] \cup \left[-40 + \frac{20\sqrt{5}}{3};\ +\infty\right)$.

Решение неравенства (5) имеет вид $\left(-\infty; 22 - 4\sqrt{5}\right] \cup \left[22 + 4\sqrt{5};\ +\infty\right)$.

Пересечение указанных множеств даёт решение системы (2)–(5): $\left[12; 22 - 4\sqrt{5}\right]$.

II. Круг (K_2) вложен в круг (K_1), и при этом круг (K_2) целиком лежит в полосе (П).

Критерий того, что круг (К$_2$) вложен в круг (К$_1$): $d + R_2 \le R_1$. Подставив сюда выражения для d, R_1, R_2, получим

$$\sqrt{(a-4)^2 + (4-4a)^2} + 2|a|\sqrt{5} \le 4\sqrt{5}. \qquad (6)$$

Критерий того, что круг (К$_2$) целиком лежит в полосе (П): центр круга (К$_2$) лежит в полосе (П) и при этом расстояние от центра круга (К$_2$) до прямых (П$_1$), (П$_2$) не менее R_2. Воспользовавшись формулой для вычисления расстояния ρ от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

получим

$$a - 115 \le 12 + 3(4a - 1) \le 115 - a, \qquad (7)$$

$$\frac{|11a + 124|}{5} \ge 2|a|\sqrt{5}, \qquad (8)$$

$$\frac{|13a - 106|}{5} \ge 2|a|\sqrt{5}. \qquad (9)$$

Решение неравенства (6) имеет вид $\left[-20 + 8\sqrt{6}; \frac{4}{3}\right]$.

Решение неравенства (7) имеет вид $\left[-\frac{124}{11}; \frac{106}{13}\right]$.

Решение неравенства (8) имеет вид $\left[\frac{124}{379}\left(11 - 10\sqrt{5}\right);\ \frac{124}{379}\left(11 + 10\sqrt{5}\right)\right]$.

Решение неравенства (9) имеет вид $\left[\frac{106}{331}\left(-13 - 10\sqrt{5}\right);\ \frac{106}{331}\left(-13 + 10\sqrt{5}\right)\right]$.

Пересечение указанных множеств даёт решение системы (6)–(9):
$\left[-20 + 8\sqrt{6}; \frac{4}{3}\right]$.

Объединив решения систем (2)–(5), (6)–(9) и выбросив значение $a = 0$, при котором круг (К$_2$) вырождается в точку (и тогда система (К$_1$), (К$_2$), (1) задаёт точку на плоскости), получим ответ:

$$\left[-20 + 8\sqrt{6};\ 0\right) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right] \cup \left[12;\ 22 - 4\sqrt{5}\right].$$