ММ225. *Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(2a+3)x^2 + ax + 3a - 1 = 0$ имеет два целых корня.*

Ответ: $-\frac{47}{31}$ и $-\frac{13}{9}$.

Решение. Если коэффициент при x^2 в уравнении

$$(2a+3)x^2 + ax + 3a - 1 = 0 \tag{1}$$

равен нулю, то уравнение линейное и иметь два корня не может. Поэтому коэффициент при x^2 должен быть ненулевым, тогда можно поделить уравнение на этот коэффициент:

$$x^2 + \frac{a}{2a+3}x + \frac{3a-1}{2a+3} = 0. \tag{2}$$

Если уравнение имеет два целых корня, то сумма и произведение корней — тоже целые числа. Но сумма корней равна $-\frac{a}{2a+3}$, а произведение корней равно $\frac{3a-1}{2a+3}$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2a+3} &= m, \\ \frac{3a-1}{2a+3} &= n, \end{aligned}$$

где m и n — некоторые целые числа. Тогда

$$\begin{aligned} a &= -\frac{3m}{1+2m}, \\ a &= \frac{1+3n}{3-2n}. \end{aligned} \tag{3}$$

Приравняв эти два выражения, получим

$$11m + 3n + 1 = 0.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$m = 3(4m+n) + 1,$$

откуда

$$m = 3k + 1, \tag{4}$$

где

$$k = 4m + n \tag{5}$$

— некоторое целое число.

Из (4) и (5) находим

$$n = -11k - 4. \tag{6}$$

Поскольку уравнение (2) имеет вид

$$x^2 - mx + n = 0,$$

то, подставив сюда выражения (4) и (6), запишем его как

$$x^2 - (3k+1)x - 11k - 4 = 0.$$

Для того чтобы последнее уравнение имело два целых корня, необходимо, чтобы его дискриминант был целым квадратом. Отсюда

$$9k^2 + 50k + 17 = l^2, \tag{7}$$

где l — некоторое ненулевое целое число (без ограничения общности можно считать его положительным).

В свою очередь, уравнение (7) должно иметь целые корни k, поэтому его дискриминант также является целым квадратом. Отсюда

$$4(472 + 9l^2) = 4p^2,$$

где p — целое положительное число.

Значит,

$$p^2 - 9l^2 = 472,$$

откуда

$$(p - 3l)(p + 3l) = 472.$$

Заметим, что множители $p - 3l$ и $p + 3l$ имеют одинаковую чётность, а поскольку их произведение 472 —чётное, то и они тоже чётные. Отсюда получим

$$q_1q_2 = 118,$$

где $q_1 = \frac{p-3l}{2}$, $q_2 = \frac{p+3l}{2}$ — тоже целые числа, причём $0 < q_1 < q_2$.

Рассмотрим все возможные представления числа 118 в виде произведения двух натуральных чисел и в каждом случае найдём p и l:

	q_1	q_2	p	l
$118 = 1 \cdot 118$	1	118	119	39
$118 = 2 \cdot 59$	2	59	61	19

Теперь из уравнения (7) находим k. Для $l = 39$ уравнение (7) имеет единственный целый корень $k = -16$, для $l = 19$ уравнение (7) имеет единственный целый корень $k = 4$.

Подставив найденные k в формулы (4), (6), найдём m и n, затем из формулы (3) определим a. Получится

$$m = -47, \quad n = 172, \quad a = -\frac{47}{31}$$

и

$$m = 13, \quad n = -48, \quad a = -\frac{13}{9}.$$

В первом случае уравнение (1) принимает вид

$$-\frac{1}{31}x^2 - \frac{47}{31}x - \frac{172}{31} = 0$$

и имеет два целых корня $x = -43$ и $x = -4$.

Во втором случае уравнение (1) принимает вид

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{13}{9}x - \frac{48}{9} = 0$$

и имеет два целых корня $x = -3$ и $x = 16$.