ММ241. При каких натуральных n множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно разбить на два подмножества так, что произведение элементов первого подмножества равно сумме элементов второго?

Ответ. При всех натуральных n, кроме $n = 1$, $n = 2$ и $n = 4$.

Решение. То, что указанное разбиение невозможно для $n = 1$, $n = 2$ и $n = 4$, проверяется простым перебором. Для $n = 3$ указанное разбиение возможно, так как

$3 = 1 + 2$.

Докажем, что указанное разбиение возможно для всех натуральных $n \geq 5$. Рассмотрим два случая, чётного и нечётного n.

Первый случай: $\boldsymbol{n}$ — чётное, $\boldsymbol{n = 2k}$, $\boldsymbol{k \geq 3}$. Разобьём множество $\{1, 2, \ldots, 2k\}$ на два подмножества: $\{1, k-1, 2k\}$ и все остальные элементы. Поскольку $k \geq 3$, то подмножество $\{1, k-1, 2k\}$ содержит три различных элемента. При этом произведение элементов подмножества $\{1, k-1, 2k\}$ равно сумме элементов второго подмножества, которая вычисляется как

$$(1 + 2 + \cdots + 2k) - 1 - (k-1) - 2k = \frac{2k(2k+1)}{2} - 1 - (k-1) - 2k =$$
$$= k(2k+1) - 3k = 1 \cdot (k-1) \cdot 2k.$$

Второй случай: $\boldsymbol{n}$ — нечётное, $\boldsymbol{n = 2k+1}$, $\boldsymbol{k \geq 2}$. Разобьём множество $\{1, 2, \ldots, 2k+1\}$ на два подмножества: $\{1, k, 2k\}$ и все остальные элементы. Поскольку $k \geq 2$, то подмножество $\{1, k, 2k\}$ содержит три различных элемента. При этом произведение элементов подмножества $\{1, k, 2k\}$ равно сумме элементов второго подмножества, которая вычисляется как

$$\big(1 + 2 + \cdots + (2k+1)\big) - 1 - k - 2k = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} - 1 - k - 2k =$$
$$= (k+1)(2k+1) - 1 - 3k = 1 \cdot k \cdot 2k.$$