ММ242. На сайте проводится опрос, кого из m номинированных футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует один раз за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округленных до целого числа. После того как проголосовали n посетителей, суммарный рейтинг номинантов составил 95%.

а) При каком наименьшем m такое возможно?

b) При каком наименьшем n такое возможно?

c) При каком наименьшем $m+n$ такое возможно?

Ответ. а) $m=11$, b) $n=19$, c) $m+n=37$.

Решение.

a) При округлении процента голосов, отданных за некоторого футболиста, до целого числа в меньшую сторону, разность между точным рейтингом и округлённым меньше $0{,}5\%$. Поэтому для того, чтобы суммарная ошибка округления в меньшую сторону составила 5%, необходимо произвести округление более 10 раз. Это значит, что число футболистов, за каждого из которых отдано не менее одного голоса, не может быть меньше 11. Следовательно, $m \geq 11$.
Докажем, что значение $m=11$ достигается. Пусть $n=201$. Пусть за 10 футболистов отдано по одному голосу, тогда рейтинг каждого из них равен $\frac{1}{201} \approx 0{,}004975 \approx 0\%$. А за одиннадцатого футболиста отдан 191 голос, тогда его рейтинг равен $\frac{191}{201} \approx 0{,}950249 \approx 95\%$. Суммарный рейтинг футболистов равен 95%.
Итак, наименьшее m равно 11.

b) Из пункта а) следует, что число футболистов, за каждого из которых отдано не менее одного голоса, не может быть меньше 11. Поэтому и число проголосовавших не может быть меньше 11.
Представляя числа $n=11, 12, \dots, 19$ в виде суммы не менее чем 11 натуральных слагаемых всеми возможными способами и вычисляя соответствующий суммарный рейтинг, определяем, что наименьшее n, при котором суммарный рейтинг равен 95%, равно 19. При этом число футболистов тоже 19, и за каждого футболиста отдано по одному голосу. Рейтинг каждого футболиста равен $\frac{1}{19} \approx 0{,}052632 \approx 5\%$, и суммарный рейтинг равен 95%.
Таким образом, наименьшее n равно 19.

c) Из пункта b) следует, что $n \geq 19$. При $n=19$ суммарный рейтинг равен 95%, только когда $m=19$. Поэтому $m+n \geq 38$.
При $n=20$ округления не происходит, поэтому суммарный рейтинг 95% не достигается.
Представляя числа $n=21, 22$ в виде суммы не менее чем 11 и не более чем 16 или 15 натуральных слагаемых соответственно всеми возможными способами и

вычисляя соответствующий суммарный рейтинг, определяем, что суммарный рейтинг 95% не достигается.
При $n = 23$ достаточно рассмотреть все возможные разбиения n на сумму не менее чем 11 и не более чем 14 натуральных слагаемых. Вычисляя соответствующий суммарный рейтинг, приходим к выводу, что суммарный рейтинг 95% достигается при $m = 14$. При этом за каждого из 13 футболистов отдано по одному голосу, и рейтинг каждого из них равен $\frac{1}{23} \approx 0{,}043478 \approx 4\%$. А за четырнадцатого футболиста отдано 10 голосов, и его рейтинг равен $\frac{10}{23} \approx 0{,}434783 \approx 43\%$. Суммарный рейтинг футболистов равен 95%.
Таким образом, достигается значение $m + n = 37$.
При $n = 24$ достаточно рассмотреть все возможные разбиения n на сумму 11 или 12 натуральных слагаемых. При этом суммарный рейтинг 95% не достигается.
При $n = 25$ округления не происходит, поэтому суммарный рейтинг 95% не достигается.
При $n \geq 26$ и $m \geq 11$ не могут достигаться значения $m + n < 37$. Поэтому наименьшее значение $m + n$ равно 37.