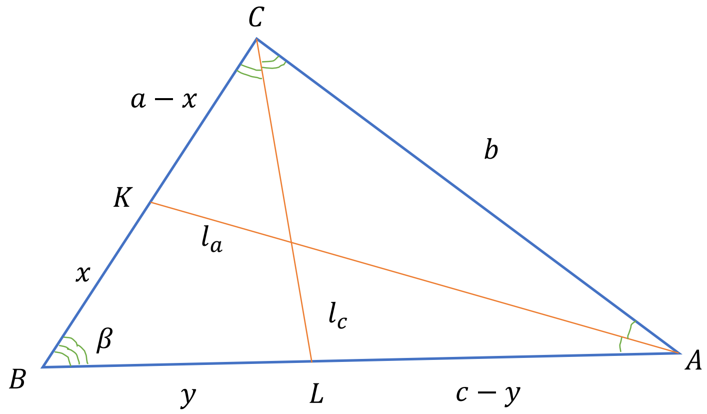
ММ243. В треугольнике ABC $a < b < c$ и $a \cdot l_a = c \cdot l_c$. Найти угол β.

Ответ. $\pi/3$.

Решение. В треугольнике ABC проведём биссектрисы $AK = l_a$ и $CL = l_c$. Обозначим $BK = x$, $BL = y$. Согласно свойству биссектрис треугольника ABC



$$\frac{a - x}{x} = \frac{b}{c},$$

$$\frac{c - y}{y} = \frac{b}{a}.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{ac}{b + c}, \qquad y = \frac{ac}{a + b}. \tag{1}$$

Запишем теорему косинусов для треугольников ABK и BCL:

$$l_a^2 = x^2 + c^2 - 2xc\cos\beta, \tag{2}$$

$$l_c^2 = a^2 + y^2 - 2ay\cos\beta. \tag{3}$$

Возведём равенство $a \cdot l_a = c \cdot l_c$ в квадрат и подставим в него выражения для l_a^2 и l_c^2 из (2), (3):

$$a^2(x^2 + c^2 - 2xc\cos\beta) = c^2(a^2 + y^2 - 2ay\cos\beta).$$

Раскрыв скобки, преобразуем полученное равенство к виду

$$(cy - ax)(cy + ax) = 2ac(cy - ax)\cos\beta. \tag{4}$$

Из (1) получим

$$cy - ax = \frac{ac(c - a)(a + b + c)}{(a + b)(b + c)},$$

$$cy + ax = \frac{ac(a^2 + c^2 + ab + bc)}{(a + b)(b + c)}. \tag{5}$$

Поскольку $0 < a < b < c$, то $cy - ax \neq 0$, и на это выражение можно сократить в (4). Также подставив в (4) выражение для $cy + ax$ из (5), получим

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 + ab + bc}{2(a + b)(b + c)}. \tag{6}$$

С другой стороны, записав теорему косинусов для треугольника ABC, находим

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}. \tag{7}$$

Приравняв правые части равенств (6) и (7), получим

$$\frac{a^2 + c^2 + ab + bc}{2(a + b)(b + c)} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Последнее равенство преобразуется к виду

$$(a + b + c)(a^2 + c^2 - b^2 - ac) = 0,$$

откуда

$$a^2 + c^2 - b^2 = ac. \qquad (8)$$

С учётом (8) равенство (7) принимает вид

$$\cos\beta = \frac{1}{2},$$

откуда $\beta = \pi/3$.