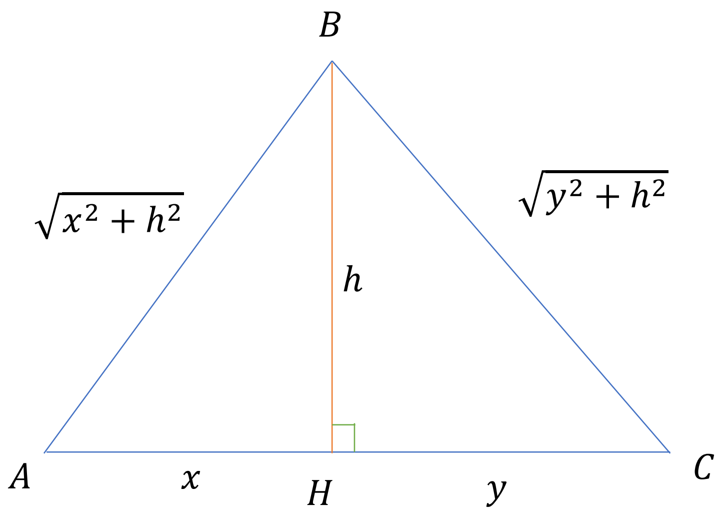
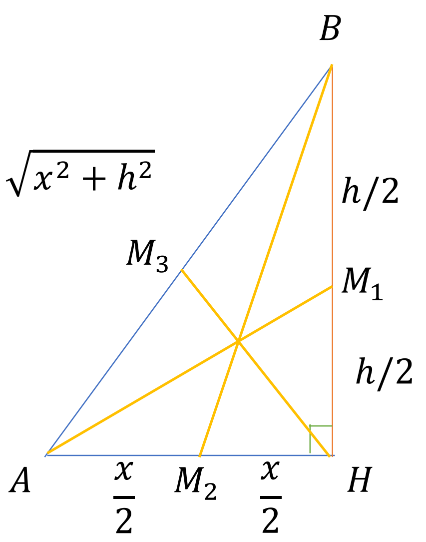
ММ245. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Найти отношение площадей треугольников ABH и CBH, если первый из них подобен треугольнику из своих медиан, а второй — треугольнику из своих высот.

Ответ. $\frac{\sqrt{\sqrt{5}\pm 1}}{2}$.

Решение. Обозначим $AH = x$, $CH = y$, $BH = h$. Тогда $AB = \sqrt{x^2 + h^2}$, $BC = \sqrt{y^2 + h^2}$.





В треугольнике ABH проведём медианы AM_1, BM_2, HM_3.

Медианы AM_1 и BM_2 найдём по теореме Пифагора:

$$AM_1 = \frac{\sqrt{4x^2 + h^2}}{2},$$

$$BM_2 = \frac{\sqrt{4h^2 + x^2}}{2}.$$

Медиана HM_3, опущенная на гипотенузу AB, равна половине гипотенузы:

$$HM_3 = \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{2}.$$

Прямоугольный треугольник ABH со сторонами x, h, $\sqrt{x^2 + h^2}$ подобен треугольнику, составленному из его медиан длиной $\frac{\sqrt{4x^2+h^2}}{2}$, $\frac{\sqrt{4h^2+x^2}}{2}$, $\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{2}$. Значит, треугольник из медиан тоже прямоугольный. На роль его гипотенузы годится наибольшая из медиан: $\frac{\sqrt{4x^2+h^2}}{2}$ или $\frac{\sqrt{4h^2+x^2}}{2}$. Получаем два варианта.

А. Гипотенузой является $\frac{\sqrt{4x^2+h^2}}{2}$. Тогда

$$\left(\frac{\sqrt{4x^2 + h^2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{4h^2 + x^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{2}\right)^2,$$

откуда

$$x = \sqrt{2}h.$$

Тогда стороны треугольника ABH равны h, $\sqrt{2}h$, $\sqrt{3}h$, и треугольник его из медиан длиной $\frac{\sqrt{3}}{2}h$, $\frac{\sqrt{6}}{2}h$, $\frac{3}{2}h$ подобен треугольнику ABH с коэффициентом подобия $\frac{\sqrt{3}}{2}$. При этом

$$\angle A = \operatorname{arctg}\frac{h}{x} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 32{,}26°.$$

Б. Гипотенузой является $\frac{\sqrt{4h^2+x^2}}{2}$. Тогда

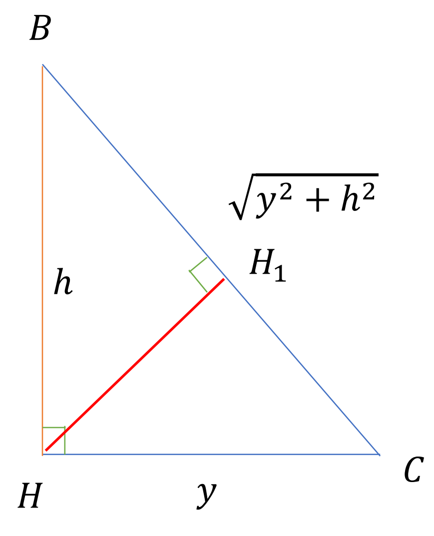
$$\left(\frac{\sqrt{4h^2 + x^2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{4x^2 + h^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{2}\right)^2,$$

откуда

$$x = h/\sqrt{2}.$$

Тогда стороны треугольника ABH равны $\frac{h}{\sqrt{2}}$, h, $\sqrt{\frac{3}{2}}h$, и треугольник из его медиан длиной $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}h$, $\frac{\sqrt{3}}{2}h$, $\frac{3}{2\sqrt{2}}h$ подобен треугольнику ABH с коэффициентом подобия $\frac{\sqrt{3}}{2}$. При этом

$$\angle A = \operatorname{arctg}\frac{h}{x} = \operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 54{,}74°.$$



В треугольнике BCH со сторонами h, y, $\sqrt{y^2 + h^2}$ высотами являются катеты $BH = h$, $CH = y$ и высота, опущенная на гипотенузу, HH_1.

Из подобия треугольников CHH_1 и CBH получим

$$\frac{HH_1}{y} = \frac{h}{\sqrt{y^2 + h^2}},$$

откуда

$$HH_1 = \frac{yh}{\sqrt{y^2 + h^2}}.$$

Прямоугольный треугольник BCH со сторонами h, y, $\sqrt{y^2 + h^2}$ подобен треугольнику, составленному из его высот длиной $\frac{yh}{\sqrt{y^2+h^2}}$, h, y. Значит, треугольник из высот тоже прямоугольный. На роль гипотенузы годится наибольшая из сторон: h или y. Получаем два варианта.

В. Гипотенузой является h. Тогда

$$h^2 = y^2 + \left(\frac{yh}{\sqrt{y^2 + h^2}}\right)^2,$$

откуда

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}\, h.$$

Тогда стороны треугольника BCH равны $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\, h$, h, $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}\, h$, и треугольник из его высот длиной $\frac{\sqrt{5}-1}{2} h$, $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\, h$, h подобен треугольнику BCH с коэффициентом подобия $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. При этом

$$\angle B = \operatorname{arctg}\frac{h}{y} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5} - 1}} \approx 51{,}83°.$$

Г. Гипотенузой является y. Тогда

$$y^2 = h^2 + \left(\frac{yh}{\sqrt{y^2 + h^2}}\right)^2,$$

откуда

$$y = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5} - 1}}\, h.$$

Тогда стороны треугольника BCH равны h, $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}\, h$, $\frac{2}{\sqrt{5}-1} h$, и треугольник из его высот длиной $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\, h$, h, $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}\, h$ подобен треугольнику BCH с коэффициентом подобия $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. При этом

$$\angle B = \operatorname{arctg}\frac{h}{y} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \approx 38{,}17°.$$

В треугольнике ABC реализуется один из четырёх случаев: **АВ**, **АГ**, **БВ**, **БГ**. Вычислим $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ в каждом из этих случаев.

	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	x	y	x/y
АВ	32,26°	51,83°	95,91°	$\sqrt{2}h$	$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}h$	$\sqrt{\sqrt{5}+1}$
АГ	32,26°	38,17°	109,57°	$\sqrt{2}h$	$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}h$	$\sqrt{\sqrt{5}-1}$
БВ	54,74°	51,83°	73,43°	$h/\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}h$	$\frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{2}$
БГ	54,74°	38,17°	87,09°	$h/\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}h$	$\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$

По условию задачи треугольник ABC остроугольный, поэтому реализуется случай **БВ** или **БГ.** У треугольников ABH и CBH общая высота BH, поэтому отношение их площадей равно $AH/CH = x/y$. Вычислив x/y для каждого из двух случаев, получим ответ.