<u>Задача ММ247</u>

Эстетическая оценка: 5

Ответ: $\frac{1}{17}$ и $\frac{1}{289}$

Решение.

1) Обозначим $\text{НОК}(n+1, n+2, n+3, n+4) = a$. Тогда

$$f_5(n) = \frac{\text{НОК}(n, n+1, n+2, n+3, n+4)}{\text{НОК}(n+1, n+2, n+3, n+4, n+5)} = \frac{na}{\text{НОД}(n,a)} : \frac{(n+5)a}{\text{НОД}(n+5,a)} =$$

$$= \frac{n}{n+5} \cdot \frac{\text{НОД}(n+5,a)}{\text{НОД}(n,a)}$$

Заметим, что среди любых четырех последовательных чисел обязательно найдутся: число, кратное 2; число, кратное 3; число кратное 4. Поэтому НОК четырех последовательных чисел (т.е. число a) кратно: 2, 3, 4, 6, 12. Очевидно, что среди пяти последовательных чисел не может оказаться никаких двух чисел, НОД которых больше 4. Поэтому, чтобы $\text{НОД}(n,a)$ оказался наибольшим, необходимо, чтобы n было кратно 12, т.е. $\exists k \in \mathbb{N}: n = 12k$.

Заметим, что 1 – наименьшее возможное значение для выражения $\text{НОД}(n+5,a)$, а с ростом n значение выражения $\frac{n}{n+5}$ увеличивается. Значит нужно подобрать наименьшее возможное k, для которого $\text{НОД}(n+5,a) = 1$. Очевидно, что при $k=1$ условие выполнено. Итак, наименьшее значение выражения достигается при $n = 12$:

$$f_5(12) = \frac{12}{17} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{17}$$

2) Обозначим $\text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+8) = b$. Тогда

$$f_9(n) = \frac{\text{НОК}(n, n+1, \dots, n+8)}{\text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+9)} = \frac{nb}{\text{НОД}(n,b)} : \frac{(n+9)b}{\text{НОД}(n+9,b)} =$$

$$= \frac{n}{n+9} \cdot \frac{\text{НОД}(n+9,b)}{\text{НОД}(n,b)}$$

Заметим, что среди любых восьми последовательных чисел обязательно найдутся: число, кратное 2; число, кратное 3; …; число кратное 8. Поэтому НОК четырех последовательных чисел (т.е. число b) кратно произведению $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, а значит, среди его делителей есть 32 числа, старшие среди которых: 105, 120, 140, 168, 210, 280, 420, 840. Очевидно, что среди девяти последовательных чисел не может оказаться никаких двух чисел, НОД которых больше 8. Поэтому, чтобы $\text{НОД}(n,b)$ оказался наибольшим, необходимо, чтобы n было кратно 840, т.е. $\exists k \in \mathbb{N}: n = 840k$.

Заметим, что 1 – наименьшее возможное значение для выражения $\text{НОД}(n+5,a)$, а с ростом n значение выражения $\frac{n}{n+9}$ увеличивается. Значит нужно подобрать наименьшее возможное k, для которого НОД$(n+5, a) = 1$. Очевидно, что таких k нет (действительно, $840k + 9$ кратно 3 при любом значении k). Чтобы «не увеличивать» дробь $\frac{n}{n+9}$ возьмем $k = 1$. Итак, при $n = 840$:

$$f_9(840) = \frac{840}{849} \cdot \frac{3}{840} = \frac{1}{283}$$

Т.к. НОД$(849, b) > 1$, полученный результат может оказаться не наименьшим. Поэтому рассмотрим следующее по величине возможное значение для НОД(n, b): 420. Но и в этом случае НОД$(429, b) > 1$. Следующее по величине возможное значение для НОД(n, b): 280. И тогда, полагая $n = 280$, получаем НОД$(289, b) = 1$, и:

$$f_9(280) = \frac{280}{289} \cdot \frac{1}{280} = \frac{1}{289} < \frac{1}{283}$$

Поясним, что меньшие значения для n не рассматриваются, т.к. при этом изменения значения дроби $\frac{n}{n+9}$ незначительны, тогда как значение НОД(n, b) оказывается весомым.