<u>Задача ММ258</u>

Эстетическая оценка: 5

Ответ: 25

Решение.

Заметим, что каждое из чисел такого вида можно представить в виде:

$$N = 1 \cdot 10^a + 4 \cdot 10^b + 9 \cdot 10^c,$$

где $a, b, c -$ попарно различные неотрицательные целые числа. Тогда:

$$N^2 = (1 \cdot 10^a + 4 \cdot 10^b + 9 \cdot 10^c)^2 = 1 \cdot 10^{2a} + 16 \cdot 10^{2b} + 81 \cdot 10^{2c} + 8 \cdot 10^{a+b} +$$
$$+18 \cdot 10^{a+c} + 72 \cdot 10^{b+c} = 1 \cdot 10^{2a} + 1 \cdot 10^{2b+1} + 6 \cdot 10^{2b} + 8 \cdot 10^{2c+1} + 1 \cdot 10^{2c} +$$
$$+8 \cdot 10^{a+b} + 1 \cdot 10^{a+c+1} + 8 \cdot 10^{a+c} + 7 \cdot 10^{b+c+1} + 2 \cdot 10^{b+c}$$

Заметим, что если все показатели в последнем выражении попарно различны, то квадрат рассматриваемого числа состоит из цифр: 1, 1, 6, 8, 1, 8, 1, 8, 7, 2. Тогда сумма квадратов цифр равна 285.

Переберем все возможные варианты повторения показателей. Для этого рассмотрим три случая.

<u>1 случай.</u> $a < b, a < c$. Тогда:

$$N^2 = 10^{2a}(1 + 4 \cdot 10^{b-a} + 9 \cdot 10^{c-a})^2$$

Чтобы определить все возможные значения для суммы квадратов цифр этого числа, достаточно рассмотреть числа вида:

$$A = (1 + 4 \cdot 10^x + 9 \cdot 10^y)^2 = 1 + 6 \cdot 10^{2x} + 1 \cdot 10^{2x+1} + 1 \cdot 10^{2y} + 8 \cdot 10^{2y+1} + 8 \cdot 10^x +$$
$$+8 \cdot 10^y + 1 \cdot 10^{y+1} + 2 \cdot 10^{x+y} + 7 \cdot 10^{x+y+1},$$

x и $y -$ попарно различные натуральные числа.

Приравнивая попарно все встречающиеся в последнем выражении показатели, мы получим уравнения, часть из которых очевидно не имеют решения, а некоторые уравнения являются равносильными друг другу. Рассмотрим только те уравнения, которые имеют решения:

1) $y = 1$
2) $y = 2x$
3) $y = x + 1$
4) $y = 2x - 1$
5) $y = 2x + 1$
6) $x = 1$
7) $x = 2y$
8) $x = y + 1$
9) $x = 2y + 1$

Рассматривая эти случаи, будем считать, что выполнено только данное равенство и никакое другое. Случаи, когда одновременно выполнены два равенства или более, выпишем отдельно (они легко определяются при составлении всевозможных систем двух уравнений):

10) $x = 2, y = 1$
11) $x = 3, y = 1$
12) $x = 1, y = 2$

13) $x = 1, y = 3$

14) $x = 2, y = 3$

Рассматриваемый случай	Число A	Цифры числа A	Сумма квадратов этих цифр
1) $y = 1$	$1 + 6 \cdot 10^{2x} + 1 \cdot 10^{2x+1} + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^x + 8 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^{x+1} + 7 \cdot 10^{x+2}$	1, 6, 1, 2, 8, 8, 8, 2, 7	287
2) $y = 2x$	$1 + 4 \cdot 10^{2x} + 3 \cdot 10^{2x+1} + 1 \cdot 10^{4x} + 8 \cdot 10^{4x+1} + 8 \cdot 10^x + 2 \cdot 10^{3x} + 7 \cdot 10^{3x+1}$	1, 4, 3, 1, 8, 8, 2, 7	208
3) $y = x + 1$	$1 + 6 \cdot 10^{2x} + 3 \cdot 10^{2x+1} + 8 \cdot 10^{2x+2} + 8 \cdot 10^{2x+3} + 8 \cdot 10^x + 8 \cdot 10^{x+1} + 1 \cdot 10^{x+2}$	1, 6, 3, 8, 8, 8, 8, 1	303
4) $y = 2x - 1$	$1 + 7 \cdot 10^{2x} + 1 \cdot 10^{2x+1} + 1 \cdot 10^{4x-2} + 8 \cdot 10^{4x-1} + 8 \cdot 10^x + 8 \cdot 10^{2x-1} + 2 \cdot 10^{3x-1} + 7 \cdot 10^{3x}$	1, 7, 1, 1, 8, 8, 8, 2, 7	297
5) $y = 2x + 1$	$1 + 6 \cdot 10^{2x} + 9 \cdot 10^{2x+1} + 1 \cdot 10^{4x+2} + 8 \cdot 10^{4x+3} + 8 \cdot 10^x + 1 \cdot 10^{2x+2} + 2 \cdot 10^{3x+1} + 7 \cdot 10^{3x+2}$	1, 6, 9, 1, 8, 8, 1, 2, 7	301
6) $x = 1$	$1 + 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^{2y} + 8 \cdot 10^{2y+1} + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^y + 3 \cdot 10^{y+1} + 7 \cdot 10^{y+2}$	1, 6, 1, 1, 8, 8, 8, 3, 7	289
7) $x = 2y$	$1 + 6 \cdot 10^{4y} + 1 \cdot 10^{4y+1} + 9 \cdot 10^{2y} + 8 \cdot 10^{2y+1} + 8 \cdot 10^y + 1 \cdot 10^{y+1} + 2 \cdot 10^{3y} + 7 \cdot 10^{3y+1}$	1, 6, 1, 9, 8, 8, 1, 2, 7	301
8) $x = y + 1$	$1 + 4 \cdot 10^{2y+2} + 2 \cdot 10^{2y+3} + 1 \cdot 10^{2y} + 9 \cdot 10^{y+1} + 8 \cdot 10^y$	1, 4, 2, 1, 9, 8	167
9) $x = 2y + 1$	$1 + 6 \cdot 10^{4y+2} + 1 \cdot 10^{4y+3} + 1 \cdot 10^{2y} + 1 \cdot 10^{2y+2} + 6 \cdot 10^{2y+1} + 8 \cdot 10^y + 1 \cdot 10^{y+1} + 2 \cdot 10^{3y+1} + 7 \cdot 10^{3y+2}$	1, 6, 1, 1, 1, 6, 8, 1, 2, 7	194
10) $x = 2, y = 1$	$1 + 4 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^1$	1, 4, 2, 1, 8	86
11) $x = 3, y = 1$	$1 + 6 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5$	1, 6, 1, 2, 6, 8, 3, 7	200
12) $x = 1, y = 2$	$1 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^1$	1, 4, 5, 8, 8, 8	234
13) $x = 1, y = 3$	$1 + 6 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5$	1, 6, 9, 1, 8, 8, 3, 7	305
14) $x = 2, y = 3$	$1 + 7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^3$	1, 7, 3, 8, 8, 8, 8	315

<u>2 случай.</u> $b < c, b < a$. Тогда:

$$N^2 = 10^{2b}(1 \cdot 10^{a-b} + 4 + 9 \cdot 10^{c-b})^2$$

Чтобы определить все возможные значения для суммы квадратов цифр этого числа, достаточно рассмотреть числа вида:

$$B = (1 \cdot 10^x + 4 + 9 \cdot 10^y)^2 = 1 \cdot 10^{2x} + 8 \cdot 10^x + 8 \cdot 10^{x+y} + 1 \cdot 10^{x+y+1} + 2 \cdot 10^y + \\ +7 \cdot 10^{y+1} + 1 \cdot 10^{2y} + 8 \cdot 10^{2y+1} + 1 \cdot 10^1 + 6,$$

x и $y -$ попарно различные натуральные числа.

Рассмотрим уравнения аналогично предыдущему пункту и выпишем подходящие случаи. Заметим, что при рассмотрении некоторых случаев приведение подобных слагаемых может дать коэффициент большие 9. Тогда может возникнуть «новый» непустой разряд. В таких ситуациях мы считаем, что соответствующий показатель действительно отличен от остальных. Однако ниже будем добавлять случаи, когда этот показатель совпадает с каким-то из других.

Рассматриваемый случай	Число B	Цифры числа B	Сумма квадратов этих цифр
1) $y = 1$	$1 \cdot 10^{2x} + 8 \cdot 10^x +$ $+8 \cdot 10^{x+1} + 1 \cdot 10^{x+2} +$ $+3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^3 + 6$	1, 8, 8, 1, 3, 8, 8, 6	303
2) $y = 2x$	$3 \cdot 10^{2x} + 8 \cdot 10^x +$ $+8 \cdot 10^{3x} + 1 \cdot 10^{3x+1} +$ $+7 \cdot 10^{2x+1} + 1 \cdot 10^{4x} +$ $+8 \cdot 10^{4x+1} + 1 \cdot 10^1 + 6$	3, 8, 8, 1, 7, 1, 8, 1, 6	289
3) $y = x + 1$	$1 \cdot 10^{2x} + 8 \cdot 10^x +$ $+8 \cdot 10^{2x+1} + 2 \cdot 10^{2x+2} +$ $+2 \cdot 10^{x+1} + 7 \cdot 10^{x+2} +$ $+8 \cdot 10^{2x+3} + 1 \cdot 10^1 + 6$	1, 8, 8, 2, 2, 7, 8, 1, 6	287
4) $y = 2x - 1$	$8 \cdot 10^{2x} + 8 \cdot 10^x + 8 \cdot 10^{3x-1} +$ $+1 \cdot 10^{3x} + 2 \cdot 10^{2x-1} +$ $+1 \cdot 10^{4x-2} + 8 \cdot 10^{4x-1} +$ $+1 \cdot 10^1 + 6$	8, 8, 8, 1, 2, 1, 8, 1, 6	299
5) $x = 1$	$1 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^{y+1} +$ $+2 \cdot 10^{y+2} + 2 \cdot 10^y +$ $+1 \cdot 10^{2y} + 8 \cdot 10^{2y+1} + 6$	1, 9, 5, 2, 2, 1, 8, 6	216
6) $x = 2y$	$1 \cdot 10^{4y} + 9 \cdot 10^{2y} + 8 \cdot 10^{3y} +$ $+1 \cdot 10^{3y+1} + 2 \cdot 10^y + 7 \cdot 10^{y+1} +$ $+8 \cdot 10^{2y+1} + 1 \cdot 10^1 + 6$	1, 9, 8, 1, 2, 7, 8, 1, 6	301
7) $x = y + 1$	$3 \cdot 10^{2y+2} + 1 \cdot 10^{y+2} +$ $+5 \cdot 10^{y+1} + 6 \cdot 10^{2y+1} +$ $+2 \cdot 10^y + 1 \cdot 10^{2y} + 1 \cdot 10^1 + 6$	3, 1, 5, 6, 2, 1, 1, 6	113

8) $x = 2y + 1$	$1 \cdot 10^{4y+2} + 1 \cdot 10^{2y+2} +$ $+6 \cdot 10^{2y+1} + 8 \cdot 10^{3y+1} +$ $+1 \cdot 10^{3y+2} + 2 \cdot 10^{y} +$ $+7 \cdot 10^{y+1} + 1 \cdot 10^{2y} + 1 \cdot 10^{1} + 6$	1, 1, 6, 8, 1, 2, 7, 1, 1, 6	194
9) $x = 2, y = 1$	$3 \cdot 10^{4} + 6 \cdot 10^{2} + 7 \cdot 10^{3} +$ $+3 \cdot 10^{1} + 6$	3, 6, 7, 3, 6	139
10) $x = 3, y = 1$	$1 \cdot 10^{6} + 6 \cdot 10^{3} + 9 \cdot 10^{4} +$ $+1 \cdot 10^{5} + 3 \cdot 10^{1} + 8 \cdot 10^{2} + 6$	1, 6, 9, 1, 3, 8, 6	228
11) $x = 1, y = 2$	$3 \cdot 10^{2} + 9 \cdot 10^{1} + 5 \cdot 10^{3} + 3 \cdot 10^{4}$ $+ 8 \cdot 10^{5} + 6$	3, 9, 5, 3, 8, 6	224
12) $x = 2, y = 3$	$8 \cdot 10^{4} + 8 \cdot 10^{2} + 8 \cdot 10^{5} +$ $+2 \cdot 10^{6} + 2 \cdot 10^{3} + 8 \cdot 10^{7} +$ $+1 \cdot 10^{1} + 6$	8, 8, 8, 2, 2, 8, 1, 6	301
13) $x = 3,\ y = 2$	$3 \cdot 10^{6} + 2 \cdot 10^{4} + 5 \cdot 10^{3} +$ $+6 \cdot 10^{5} + 2 \cdot 10^{2} + 1 \cdot 10^{1} + 6$	3, 2, 5, 6, 2, 1, 6	115

<u>3 случай.</u> $c < a, c < b$. Тогда:

$$N^2 = 10^{2c}(1 \cdot 10^{a-c} + 4 \cdot 10^{b-c} + 9)^2$$

Чтобы определить все возможные значения для суммы квадратов цифр этого числа, достаточно рассмотреть числа вида:

$$C = (1 \cdot 10^{x} + 4 \cdot 10^{y} + 9)^2 = 1 \cdot 10^{2x} + 8 \cdot 10^{x} + 1 \cdot 10^{x+1} + 8 \cdot 10^{x+y} + 6 \cdot 10^{2y} + $$
$$+1 \cdot 10^{2y+1} + 2 \cdot 10^{y} + 7 \cdot 10^{y+1} + 8 \cdot 10^{1} + 1$$

,

x и $y -$ попарно различные натуральные числа.

Рассмотрим уравнения аналогично предыдущему пункту и выпишем подходящие случаи.

Рассматриваемый случай	Число C	Цифры числа C	Сумма квадратов этих цифр
1) $y = 1$	$1 \cdot 10^{2x} + 8 \cdot 10^{x} + 9 \cdot 10^{x+1} +$ $+4 \cdot 10^{2} + 2 \cdot 10^{3} + 1$	1, 8, 9, 4, 2, 1	167
2) $y = 2x$	$3 \cdot 10^{2x} + 8 \cdot 10^{x} + 1 \cdot 10^{x+1} +$ $+8 \cdot 10^{3x} + 6 \cdot 10^{4x} + 1 \cdot 10^{4x+1} +$ $7 \cdot 10^{2x+1} + 8 \cdot 10^{1} + 1$	3, 8, 1, 8, 6, 1, 7, 8, 1	289
3) $y = x + 1$	$1 \cdot 10^{2x} + 8 \cdot 10^{x} + 3 \cdot 10^{x+1} +$ $8 \cdot 10^{2x+1} + 6 \cdot 10^{2x+2} +$ $+1 \cdot 10^{2x+3} + 7 \cdot 10^{x+2} + 8 \cdot 10^{1} +$ $+1$	1, 8, 3, 8, 6, 1, 7, 8, 1	289
4) $y = 2x - 1$	$8 \cdot 10^{2x} + 8 \cdot 10^{x} + 1 \cdot 10^{x+1} +$ $+8 \cdot 10^{3x-1} + 6 \cdot 10^{4x-2} +$ $+1 \cdot 10^{4x-1} + 2 \cdot 10^{2x-1} +$ $+8 \cdot 10^{1} + 1$	8, 8, 1, 8, 6, 1, 2, 8, 1	299

5) $x = 1$	$3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^{y+2} +$ $+5 \cdot 10^{y+1} + 6 \cdot 10^{2y} +$ $+1 \cdot 10^{2y+1} + 2 \cdot 10^y + 1$	3, 6, 1, 5, 6, 1, 2, 1	113
6) $x = 2y$	$1 \cdot 10^{4y} + 4 \cdot 10^{2y} + 3 \cdot 10^{2y+1} +$ $+8 \cdot 10^{3y} + 2 \cdot 10^y + 7 \cdot 10^{y+1} +$ $+8 \cdot 10^1 + 1$	1, 4, 3, 8, 2, 7, 8, 1	208
7) $x = y + 1$	$1 \cdot 10^{2y+2} + 5 \cdot 10^{y+1} +$ $+2 \cdot 10^{y+2} + 9 \cdot 10^{2y+1} +$ $+6 \cdot 10^{2y} + 2 \cdot 10^y + 8 \cdot 10^1 + 1$	1, 5, 2, 9, 6, 2, 8, 1	216
8) $x = 2y - 1$	$1 \cdot 10^{4y-2} + 8 \cdot 10^{2y-1} + 7 \cdot 10^{2y} +$ $+8 \cdot 10^{3y-1} + 1 \cdot 10^{2y+1} +$ $+2 \cdot 10^y + 7 \cdot 10^{y+1} + 8 \cdot 10^1 + 1$	1, 8, 7, 8, 1, 2, 7, 8, 1	297
9) $x = 2y + 1$	$1 \cdot 10^{4y+2} + 9 \cdot 10^{2y+1} + 1 \cdot 10^{2y+2}$ $+ 8 \cdot 10^{3y+1} + 6$ $\cdot 10^{2y} + 2 \cdot 10^y + 7$ $\cdot 10^{y+1} + 8 \cdot 10^1 + 1$	1, 9, 1, 8, 6, 2, 7, 8, 1	301
10) $x = 2, y = 1$	$2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3 + 1$	2, 2, 2, 1	13
11) $x = 3, y = 1$	$1 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^2 + 1$	1, 1, 4, 1	18
12) $x = 1, y = 2$	$5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^3 +$ $+7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^5 + 1$	5, 6, 5, 7, 1, 1	137
13) $x = 2, y = 3$	$8 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 +$ $+8 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7 +$ $+8 \cdot 10^1 + 1$	8, 8, 3, 8, 6, 1, 8, 1	303
14) $x = 3, y = 2$	$1 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^4 +$ $+9 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 1$	1, 5, 8, 9, 2, 8, 1	240

Получаем, что искомое множество состоит из 25 чисел: 13, 18, 86, 113, 115, 137, 139, 200, 167, 194, 208, 216, 224, 228, 234, 240, 285, 287, 289, 297, 299, 301, 303, 305, 315.