

Сопутствующие четырехугольники

*Лецко Владимир Александрович,
доцент кафедры алгебры, геометрии и информатики
Волгоградского государственного педагогического университета*

На конфигурацию, рассматриваемую в этой статье, автор натолкнулся случайно. В рамках курса «Информационные технологии в математике», студенты вуза, в котором я преподаю, изучают систему компьютерной алгебры «Maple». Составляя задания для студентов, я рассмотрел такую ситуацию.

Пусть точки E, F, G и H – середины соответствующих сторон BC, CD, DA и AB произвольного выпуклого четырехугольника ABCD. Обозначим через K, L, M и N точки пересечения прямых AE и BF, BF и CG, CG и DH, DH и AE соответственно. В задании требовалось найти отношение (обозначим его q_R) площадей четырехугольников ABCD и KLMN. Постановка задачи вполне понятна (не только студентам, но и школьникам), но вычисления весьма громоздки, что и оправдывает применение «Maple» (или иного математического пакета).

Выверяя это задание на конкретных примерах, я обратился к четырехугольнику, изображенному на рисунке 1.a и имеющему следующие координаты вершин: A(0; 0), B(13; 0), C(12; 7), D(2; 11).

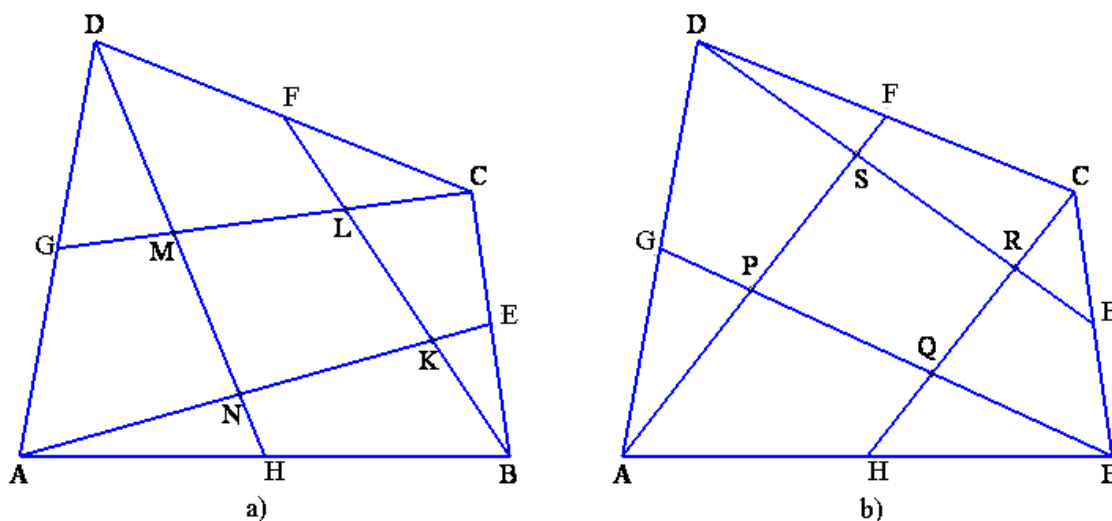


Рис. 1

Искомое отношение оказалось равным $q_R = \frac{2007261144}{401091499}$, что примерно равно 5.004497. «Пошевелив» координаты вершин, я получил другие значения q_R , но все они оказались чуть больше 5. А что, если соединить вершины исходного четырехугольника с серединами сторон в другом порядке (ведь сторона CD имеет не меньше оснований называться противоположной вершине A, чем сторона BC). Соответствующая конфигурация изображена на рис. 1.b. Оказалось, что отношение площади ABCD к площади PQRS (обозначим его q_L) еще меньше отличается от 5. А именно, $q_L = \frac{207711594}{401541949} \approx 5.0000046$.

Итак, рассматриваемое отношение зависит от формы четырехугольника, а также от порядка соединения вершин с серединами сторон. При этом оно, как правило, больше 5 на очень незначительную величину. Естественно, возникает целый ряд вопросов: найти диапазон возможных значений рассматриваемого отношения; выяснить, для каких четырехугольников достигаются границы этого диапазона и достижимы ли они вообще; описать многоугольники, для которых выполняется соотношение $q_R = q_L$.

Прежде чем начать поиск ответов на эти и другие вопросы (которые, наверняка возникнут по ходу поиска), введем обозначения, которых будем придерживаться на протяжении нашего исследования. Четырехугольник KLMN на рисунке 1.а будем называть правым сопутствующим четырехугольником четырехугольника ABCD, а четырехугольник PQRS на рисунке 1.б, соответственно, левым сопутствующим. Отметим, что такое разграничение весьма условно и зависит от направления (по или против часовой стрелки) обхода вершин четырехугольника при обозначении. Из соображений симметрии ясно, что диапазон изменения q_R ничем не отличается от диапазона изменения q_L . Поэтому, решая задачу нахождения этого диапазона, ограничимся рассмотрением только правых сопутствующих четырехугольников и договоримся временно опускать прилагательное «правый».

Поскольку задача в общем виде выглядит достаточно сложной, начнем с рассмотрения частных случаев (такой прием часто приводит к появлению идей и гипотез, способствуя, тем самым, нахождению и общего решения).

Легко видеть, что если исходный четырехугольник параллелограмм, то и сопутствующий четырехугольник тоже будет параллелограммом. Нахождение q_R для этого случая – совсем легкая задача. Точку L' , симметричную точке L относительно F , соединим с F и D . FL – средняя линия треугольника CDM .

Поэтому в четырехугольнике $LL'DM$ стороны LL' и MD равны и параллельны, поэтому он является параллелограммом. Учитывая, что $NM = MD$ (GM – средняя линия треугольника AND), получим, что параллелограммы $LL'DM$ и $KLMN$ равны. Но параллелограмм $LL'DM$, очевидно, равен треугольнику MDC . Поэтому $S_{KLMN} = S_{MDC} = S_{KBA}$. Аналогично $S_{KLMN} = S_{K'CLK} = S_{LCB} = S_{NDA}$. Окончательно получаем $q_R = S_{ABCD}/S_{KLMN} = 5$.

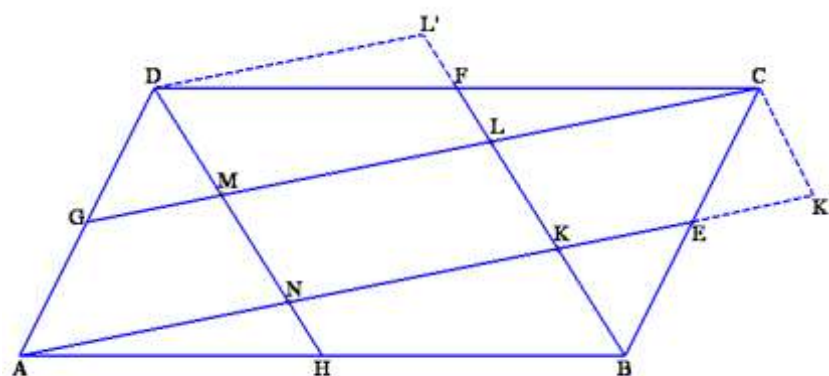


Рис. 2

Итак, в случае, когда исходный четырехугольник – параллелограмм, искомое отношение равно 5. Попытки найти четырехугольник, для которого это отношение меньше 5, ни к чему не приводят (что, разумеется, не является доказательством отсутствия таких четырехугольников). Зато эксперимент помогает обнаружить ситуации, когда рассматриваемое отношение перестает быть близким к 5. Такое случается, когда одна из сторон исходного четырехугольника гораздо меньше остальных. «Стягивая» одну из сторон в точку, мы будем неограниченно приближать исходный четырехугольник к треугольнику. При этом сопутствующий четырехугольник тоже будет превращаться в треугольник, а именно в один из тех шести треугольников, на которые разбивают исходный треугольник (бывший четырехугольник) его медианы. Легко убедиться, что площадь такого треугольника составляет одну шестую часть площади исходного. Следовательно, уменьшая одну из сторон исходного четырехугольника можно сколь угодно приблизить q_R к 6.

Подведем промежуточные итоги. На основании наших экспериментов можно выдвигать предположение: значения искомого отношения заполняют собой полусегмент $[5; 6)$. Однако, сколь бы правдоподобным ни выглядело это заключение, пока это только гипотеза. Но как же доказать (или опровергнуть) эту гипотезу? На первый взгляд эта задача выглядит очень трудной. Ведь четырехугольник определяется пятью своими независимыми элементами. Поэтому q_R является функцией пяти аргументов. Правда, по крайней мере, от одного аргумента легко избавиться. Ясно, что исследуемое отношение будет одинаковым для подобных четырехугольников, то есть зависит не от размеров, а лишь от формы ис-

Подведем промежуточные итоги. На основании наших экспериментов можно выдвигать предположение: значения искомого отношения заполняют собой полусегмент $[5; 6)$. Однако, сколь бы правдоподобным ни выглядело это заключение, пока это только гипотеза. Но как же доказать (или опровергнуть) эту гипотезу? На первый взгляд эта задача выглядит очень трудной. Ведь четырехугольник определяется пятью своими независимыми элементами. Поэтому q_R является функцией пяти аргументов. Правда, по крайней мере, от одного аргумента легко избавиться. Ясно, что исследуемое отношение будет одинаковым для подобных четырехугольников, то есть зависит не от размеров, а лишь от формы ис-

ходного четырехугольника. А форма однозначно определяется четырьмя параметрами. Например, в качестве параметров можно взять четыре угла. Разумеется, это не должны быть четыре угла исходного четырехугольника (эти данные зависимы). А вот, например, четыре угла, примыкающих к одной диагонали исходного четырехугольника, вполне пригодны.

Но и четыре аргумента – это тоже очень много. Вот если бы q_R было устойчиво по отношению еще к каким-то преобразованиям. Оказывается, так и есть! В первом номере «Кванта» за этот год опубликована статья А. Заславского «Аффинная геометрия» [1]. В ней рассказывается о преобразованиях плоскости, сохраняющих прямолинейность. Такие преобразования называются аффинными. В дальнейшем изложении будут широко использоваться свойства аффинных преобразований, описанные в статье Заславского.

Из теоремы существования и единственности аффинного преобразования (см. [1]) следует, что любой треугольник можно перевести в любой другой с помощью подходящего аффинного преобразования. С четырехугольниками дело обстоит иначе. Они разбиваются на бесконечное количество классов таких, что любые четырехугольники в пределах одного класса аффинно эквивалентны, а четырехугольники из разных классов не могут быть переведены друг в друга никаким аффинным преобразованием.

Легко заметить, что q_R является аффинным инвариантом (то есть четырехугольники, которые могут быть получены друг из друга аффинным преобразованием, имеют одинаковые значения q_R). В самом деле, при аффинных преобразованиях сохраняется выпуклость четырехугольника и отношение длин отрезков, расположенных на одной прямой или параллельных прямых. Поэтому при преобразовании исходного четырехугольника, его сопутствующий четырехугольник перейдет в сопутствующий четырехугольник образа. Что касается площадей фигур, то при аффинном преобразовании они, вообще говоря, изменяются. Но коэффициент изменения площади при фиксированном аффинном преобразовании будет одним и тем же для всех фигур. Поэтому интересующее нас отношение не изменится. Наша цель – выбрать в каждом классе наиболее удобный для вычисления q_R четырехугольник.

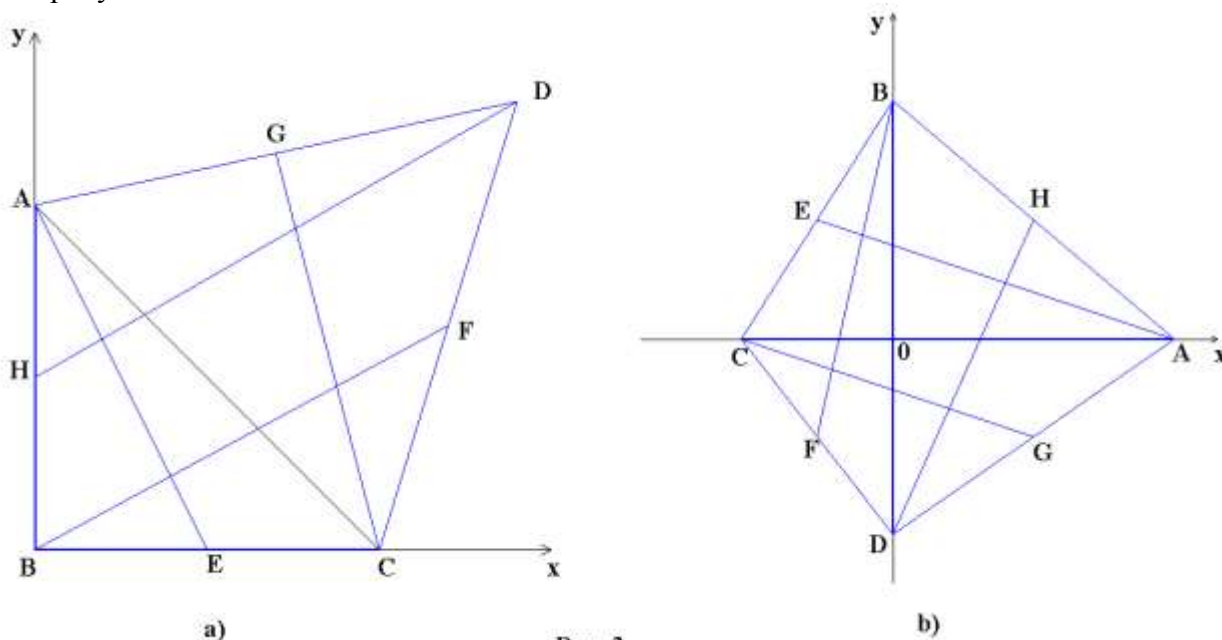


Рис. 3

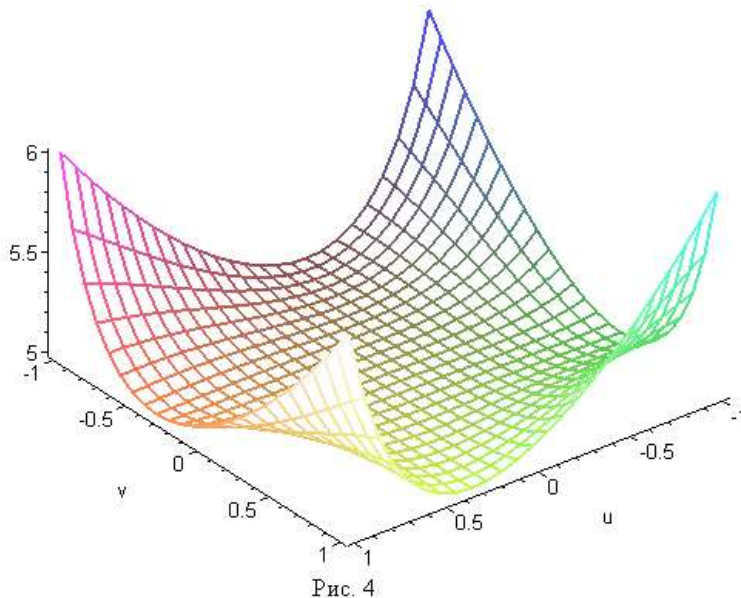
Используя теорему существования и единственности аффинного преобразования, легко убедиться, что каждый выпуклый четырехугольник аффинно эквивалентен такому четырехугольнику ABCD, что треугольник ABC будет прямоугольным равнобедренным (угол B – прямой). Свяжем с этим треугольником прямоугольную декартову систему координат, положив $A(0; 1)$, $B(0; 0)$, $C(1; 0)$. Тогда вершина D будет иметь положительные координаты a и b , удовлетворяющие неравенству $a + b > 1$ (рис. 3.а). Выразив отношение

площадей исходного и сопутствующего четырехугольников через a и b , получим выражение для q_R , зависящее всего от двух параметров. Однако у такой параметризации q_R имеются существенные недостатки. Во-первых, область допустимых положений вершины D получается недостаточно симметричной, в то время как сам сопутствующий четырехугольник определен равноправно по отношению ко всем его вершинам. Следствием такой несимметричности будет излишняя громоздкость выражения q_R через a и b . А во-вторых, эта область не является ограниченной, что существенно затрудняет исследование и наглядное представление q_R как функции от a и b .

С целью избавиться от недостатков, отмеченных в предыдущем абзаце, подойдем к выбору представителя в классе аффинно эквивалентных выпуклых четырехугольников иначе. Учитывая, что два четырехугольника аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда точка пресечения диагоналей первого четырехугольника делит каждую диагональ в том же отношении, в котором делится точкой пересечения диагоналей соответствующая диагональ второго четырехугольника (докажите это), возьмем в качестве исходного четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны и равны между собой. Теперь прямоугольную декартову систему координат можно выбрать так, чтобы вершины четырехугольника получили следующие координаты: $A(u+1; 0)$, $B(0; v+1)$, $C(u-1; 0)$, $D(0; v-1)$ (рис. 3.b). Четырехугольник $ABCD$ будет выпуклым в том и только том случае, когда параметры u и v удовлетворяют неравенствам $-1 < u < 1$, $-1 < v < 1$.

Площадь исходного четырехугольника равна 2 независимо от значений u и v (в первом варианте параметризации она зависела от a и b). Зная координаты вершин четырехугольника, можно методами аналитической геометрии выразить через u и v площадь сопутствующего четырехугольника, а значит и q_R . Однако эти вычисления довольно громоздки. Поэтому мы вновь прибегнем к помощи Maple. В результате получим:

$$q_R(u, v) = \frac{(2u - v + 5)(2u - v - 5)(2v + u + 5)(2v + u - 5)}{-u^4 + 12u^3v - 9u^2v^2 - 25u^2 - 12uv^3 + 125 - 25v^2 - v^4} \quad (1)$$



Итак, аналитическое выражение для q_R получено. Теперь мы можем построить график функции $q_R(u, v)$ (в этом нам опять поможет Maple) и получить наглядное представление о том, какие значения принимает q_R при всех u и v , удовлетворяющих принятым ограничениям. График на рисунке 4, похоже, подтверждает нашу гипотезу. Вершины квадрата, ограничивающего область определения $q_R(u, v)$, соответствуют вырожденным «четырёхугольникам», в которых одна из сторон обрати-

лась в точку. По мере того как абсолютные величины значений параметров (одновременно) приближаются к 1, значение q_R приближается к 6. Мы знаем, что, для класса параллелограммов (в нашей параметризации этот класс представлен квадратом, получающимся при $u = 0, v = 0$) значение q_R равно 5. Из графика видно, что для четырехугольников аффинно близких к параллелограмму (то есть четырехугольников, у которых диагонали делятся точкой пересечения на примерно равные части) значение q_R также близко к 5, что хорошо согласуется с результатами экспериментов. Однако картинка (пусть даже построенная с помощью программы) может служить лишь еще одним подтверждением, но никак

не доказательством нашей гипотезы. Точное же нахождение диапазона изменения q_R по-прежнему представляется непростой задачей. Ведь q_R является дробно-рациональной функцией, числитель и знаменатель которой – многочлены 4-й степени от двух переменных. Вот тут-то нам и поможет наша гипотеза! Одно дело, решать задачу (в нашем случае искать множество значений функции двух переменных), не имея представления о том, каким может быть ответ, и совсем другое – обосновать, что известный нам ответ верен (если, конечно, он и в самом деле верен).

Обозначим через $q_1(u,v)$ и $q_2(u,v)$ соответственно числитель и знаменатель выражения в правой части формулы (1). Отметим, что при принятых на u и v ограничениях $q_1(u,v)$ и $q_2(u,v)$ будут положительными. Поэтому неравенство $q_R(u,v) \geq 5$ равносильно неравенству $q_1(u,v) - 5q_2(u,v) \geq 0$. Подставив вместо $q_1(u,v)$ и $q_2(u,v)$ их выражения, после упрощений получим неравенство $(3u + v)^2(u - 3v)^2 \geq 0$, которое, очевидно, верно при любых u и v . Итак, q_R действительно не может быть меньше 5. При этом, как мы уже убедились раньше, для класса параллелограммов, характеризующегося соотношением $u = v = 0$, достигается значение 5. Однако, последнее неравенство показывает, что q_R может быть равным 5 не только при $u = v = 0$, но и для бесконечного множества других пар u и v . Таким образом, класс четырехугольников, определяемых соотношением $q_R = 5$ значительно шире класса параллелограммов. Прежде чем описать такие четырехугольники, завершим доказательство нашей гипотезы.

Нам осталось показать, что q_R не может достигать 6. Для этого достаточно показать, что в рассматриваемой области уравнение $q_R(u,v) = 6$ не имеет решений. То, что q_R не может превышать 6, последует тогда из непрерывности функции $q_R(u,v)$, а то, что q_R может неограниченно приближаться к 6, мы уже знаем. Точки, удовлетворяющие уравнению $q_R(u,v) = 6$, лежат на гиперболах $u^2 - 4uv - 2v^2 + 5 = 0$ и $2u^2 - 4uv - v^2 - 5 = 0$. Легко видеть, что на этих гиперболах лежат все четыре вершины квадрата, ограничивающего область допустимых значений параметров u и v . Для того чтобы убедиться, что гиперболы не проходят через внутренние точки квадрата, выразим параметр v из уравнения каждой из гипербол:

$v = -2u + \sqrt{6u^2 - 5}$ (зеленый график на рисунке 5);
 $v = -2u - \sqrt{6u^2 - 5}$ (красный график);

$v = -u + \sqrt{6u^2 + 10}/2$ (синий график); $v = -u - \sqrt{6u^2 + 10}/2$ (желтый график). Остается исследовать получившиеся четыре функции одной переменной, что мы и предоставляем читателю.

Итак, ответ на первый из поставленных нами вопросов получен: диапазон изменения отношения площади исходного выпуклого четырехугольника к площади сопутствующего

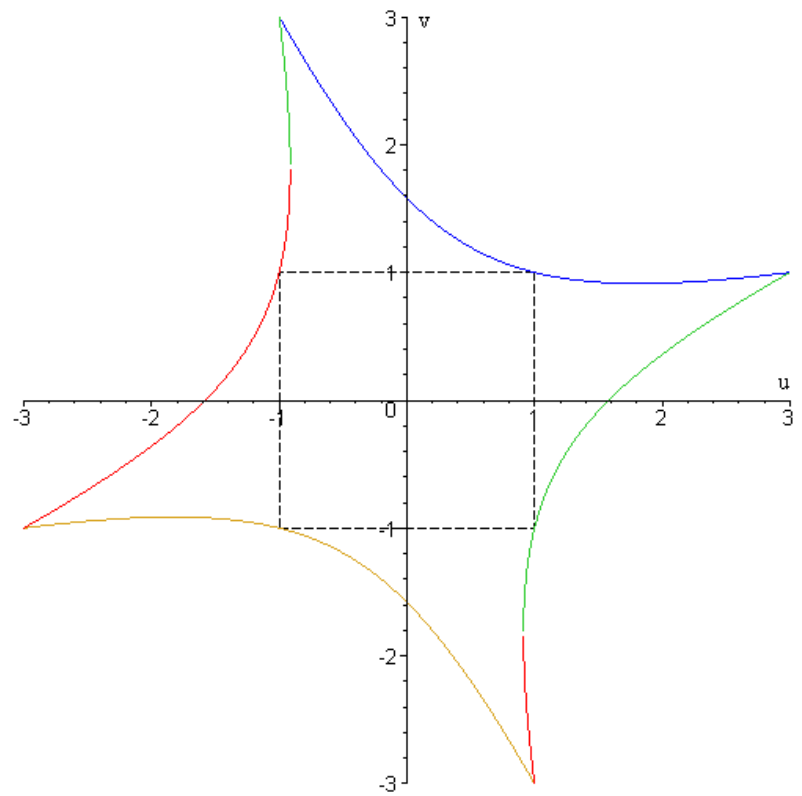


Рис. 5

представляет собой полусегмент [5; 6). В ходе поиска и обоснования ответа на этот вопрос был частично решен и второй вопрос. Верхняя граница диапазона недостижима, а нижняя достигается для широкого класса четырехугольников, частным случаем которого является класс параллелограммов. Для более детального изучения четырехугольников, удовлетворяющих соотношению $q_R = 5$, вернемся к параметризации, полученной фиксацией трех вершин исходного четырехугольника. При помощи Maple без труда (или без помощи Maple, но, затратив определенные усилия на достаточно громоздкие выкладки) найдем выражение q_R через координаты четвертой вершины:

$$q_R(a,b) = \frac{(2a + 4b - 1)(3a + b + 1)(a + 2b + 2)(4a + 3b - 2)}{4a^4 + 12a^3 + 22a^2b + 27a^2b + 41a^2b^2 - 19a^2 + 9ab^2 + 8a + 28ab^3 - 11ab - 4b - b^2 + 6b^3 + 4b^4 - 1}$$

Полагаю, что читатели, которым формула (1) показалась вначале достаточно громоздкой, теперь изменили свое мнение и оценили, во-первых, преимущества параметризации q_R через u и v , а во-вторых, возможности системы Maple, справляющейся с уравнением $q_R(a,b) = 5$ за доли секунды. Решения этого уравнения заполняют собой две прямых $2a - b = 1$ и $a + 2b = 3$. Первая из них – это, в точности, прямая HD_0 , где H , как и раньше, середина AB , а D_0 такое положение вершины D , что $ABCD_0$ – квадрат. Вторая прямая проходит через точку D_0 параллельно AE (E – середина BC). С учетом ограничений на a и b получим, что геометрическое место точек D , для которых четырехугольник $ABCD$ является выпуклым и удовлетворяет соотношению $q_R = 5$, представляет собой луч и отрезок, пересекающиеся в точке D_0 . Подвергнув всю конфигурацию аффинному преобразованию обратному тому, которое мы использовали, вводя нашу параметризацию, найдем для произвольной тройки точек A, B, C , не лежащих на одной прямой, геометрическое место четвертых вершин D (фиолетовые линии на рисунке 8), приводящих к выпуклому четырехугольнику, удовлетворяющему соотношению $q_R = 5$.

Первые найденные нами четырехугольники, для которых достигается наименьшее значение q_R , оказались параллелограммами, то есть четырехугольниками замечательными во многих отношениях. А будут ли остальные четырехугольники с q_R , равным 5, обладать еще какими-нибудь замечательными свойствами, выделяющими их из числа прочих четырехугольников? Оказывается, такое свойство есть! Докажем, что $q_R = 5$ тогда и только тогда, когда сопутствующий четырехугольник имеет хотя бы одну пару параллельных сторон.

Пусть, например, в сопутствующем четырехугольнике $ABCD$ отрезки AE и CG параллельны (рис. 6). Возьмем точку D_0 такую, что $ABCD_0$ – параллелограмм (договоримся оставить за обозначением D_0 этот смысл до конца статьи). Нам надо показать, что DD_0 параллельно AE . Продолжим CG до пересечения с AD_0 в точке G_0 . Четырехугольник $AECG_0$ – параллелограмм, поэтому AG_0 равно EC , то есть половине BC , а значит, и половине AD_0 . Следовательно, GG_0 – средняя линия треугольника ADD_0 , что и доказывает требуемую параллельность прямых DD_0 и AE .

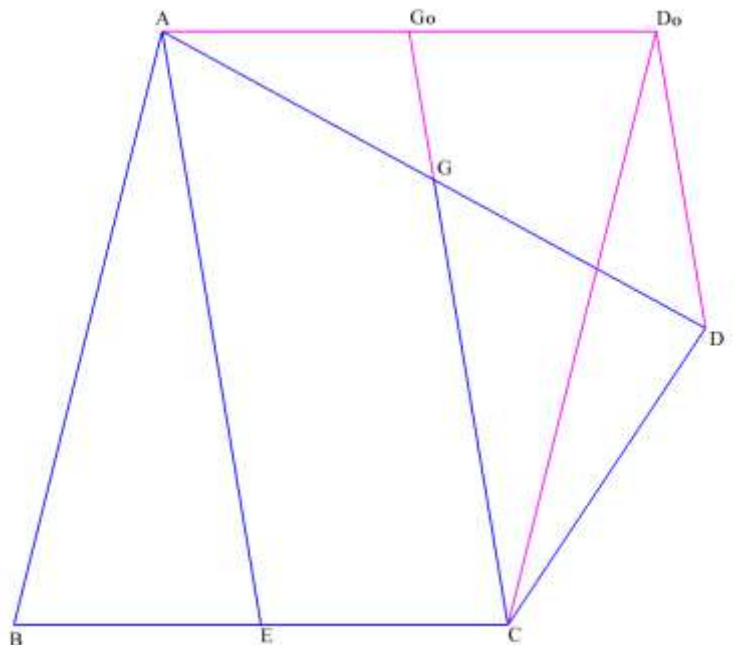


Рис. 6

Столь же легко доказывается и обратное утверждение: $q_R = 5$ влечет параллельность хотя бы одной пары сторон сопутствующего четырехугольника. Более того, мы получили описание геометрического места четвертых вершин, для которых $q_R = 5$, используя весьма громоздкие выкладки (которые проделала за нас система Maple). Однако теперь, зная ответ, легко провести простое и наглядное доказательства того, что принадлежность D прямой HD_0 (или прямой проходящей через D_0 параллельно AE) влечет $q_R = 5$. Заодно, по ходу этого доказательства, мы покажем, что в этом случае сопровождающий четырехугольник будет иметь хотя бы одну пару параллельных сторон.

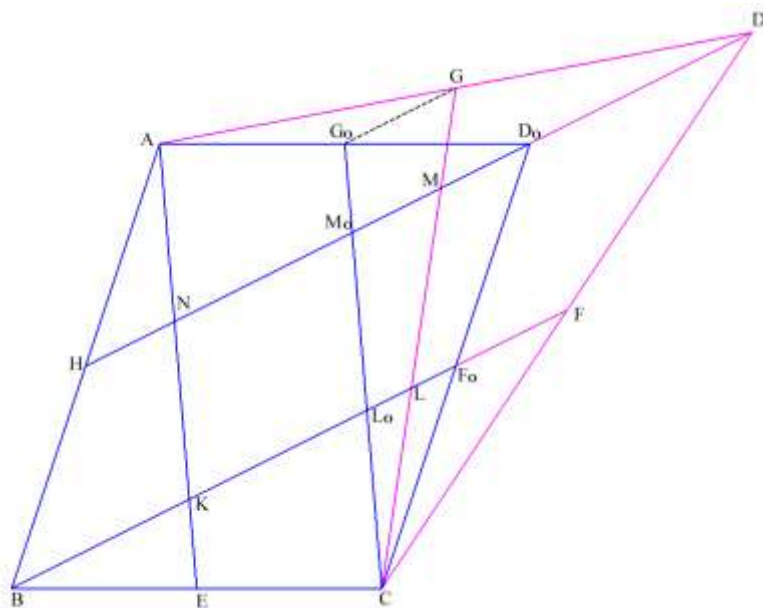


Рис. 7

Итак, пусть D расположена на луче HD_0 за точкой D_0 . Тогда FF_0 будет средней линией треугольника CDD_0 . Поэтому точки B, F, F_0 , а вслед за ними и точки K, L, L_0 лежат на одной прямой и $KLMN$ – трапеция. Для доказательства того, что для четырехугольника $ABCD$ $q_R = 5$, достаточно показать, что площадь трапеции LMM_0L_0 в 5 раз меньше площади четырехугольника $ADCD_0$.

Пусть h – высота трапеции LMM_0L_0 , а $DD_0 = d$. Тогда высота треугольника ADD_0 , опущенная из вершины A , тоже будет равна h , а высота треугольника CDD_0 , опущенная из вершины C , будет равна $2h$. Поэтому $S_{ADCD_0} = S_{ADD_0} + S_{CDD_0} = d(h + 2h)/2 = 3/2 dh$. Для нахождения площади LMM_0L_0 заметим, что $CL_0 : L_0M_0 : M_0G_0 = 2 : 2 : 1$. Отсюда $LL_0 = 1/5d$, $MM_0 = 2/5d$ и $S_{LMM_0L_0} = dh(1/5 + 2/5)/2 = 3/10 dh = 1/5 S_{ADCD_0}$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для других допустимых положений вершины D.

До сих пор мы рассматривали правые сопутствующие четырехугольники. Ясно, что все рассуждения и выводы годятся и для левых сопутствующих четырехугольников. Единственное отличие: геометрическое место точек, для которых $q_L = 5$, будет состоять из отрезка параллельного CH , а не AE , и луча, лежащего на прямой ED_0 , а не HD_0 (красные линии на рисунке 8).

Нам осталось описать многоугольники, для которых выполняется соотношение $q_R = q_L$. Для этого найдем выражение для q_L , вновь приняв за параметры координаты вершины D при фиксированных вершинах A, B и C.

$$q_L(a,b) = \frac{(3a+4b-2)(2a+b+2)(a+3b+1)(4a+2b-1)}{4a^4+6a^3+28a^3b-a^2+41a^2b^2+9a^2b+27ab^2-4a+22ab^3-11ab+8b-19b^2+12b^3+4b^4-1}$$

(Внимательные читатели заметили, что последнее выражение получается из выражения для $q_R(a,b)$, если поменять местами параметры a и b .) Решив уравнение $q_R(a,b) = q_L(a,b)$, найдем, что равенство площадей правого и левого сопутствующих четы-

того пересекаются в точке О, был параллелограммом необходимо и достаточно выполнение любых двух из следующих четырех условий: 1) $AB \parallel CD$; 2) $AD \parallel BC$; 3) $AO = CO$; 4) $BO = DO$. Для того, чтобы площади правого и левого сопутствующих четырехугольников данного выпуклого четырехугольников были равны необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из четырех вышеперечисленных условий.

Вопросы для самостоятельного исследования:

- Какие из полученных результатов останутся в силе, если отказаться от требования выпуклости исходного четырехугольника?
- Можно ли интерпретировать хотя бы часть из полученных результатов так, чтобы они оказались верны для самопересекающихся четырехугольников?
- Каким будет диапазон изменения отношения площади исходного выпуклого четырехугольника к «сопутствующему», если в качестве сопутствующего рассматривать четырехугольник, определенный в задаче 2 статьи [1]?

1. *А. Заславский*. Аффинная геометрия. – Квант, 2009, №1, с. 8-12