MM232

Дзюбенко В.А.

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^3+y^3 = z^3-i$ для каждого $i \in \{1, 2, 4\}$?

У этой задачи, должно быть, есть красивое решение с использованием полей (не зря же ведущий намекнул на них). У меня с полями всё хорошо, но не настолько, чтобы я нашёл, как их сюда применить, поэтому привожу другое решение. Идея — для каждого случая найти несколько троек (x, y, z), удовлетворяющих уравнению, найти в них закономерность и построить по ней бесконечную серию.

Для начала попробуем компьютерным перебором найти решения этого уравнения для какого-то i. Понятно, что если (x, y, z) — решение уравнения, то (y, x, z) тоже. Поэтому зададим условие для перебора $1 \le y \le x \le 10000$, z будем искать для каждой пары (x, y) бинарным поиском.

Для $i = 2$ получаем такой список решений:

$$\begin{aligned}
x = 6,\quad & y = 5,\quad z = 7\\
x = 47,\quad & y = 24,\quad z = 49\\
x = 161,\quad & y = 54,\quad z = 163\\
x = 383,\quad & y = 96,\quad z = 385\\
x = 749,\quad & y = 150,\quad z = 751\\
x = 1295,\quad & y = 216,\quad z = 1297\\
x = 2057,\quad & y = 294,\quad z = 2059\\
x = 3071,\quad & y = 384,\quad z = 3073\\
x = 4373,\quad & y = 486\quad z = 4375\\
x = 5999,\quad & y = 600,\quad z = 6001\\
x = 7985,\quad & y = 726,\quad z = 7987
\end{aligned}$$

Здесь закономерность сразу бросается в глаза: $z = x + 2$ (в первом решении $z = y + 2$). Ищем бесконечную серию для $i = 2$ с этим условием:

$$x^3 + y^3 = (x + 2)^3 - 2;$$

Раскрываем скобки и получаем:

$$y^3 = 6x^2 + 12x + 6 = 6(x + 1)^2.$$

Понятно, что если $(x + 1)$ кратно 6, то $6(x + 1)^2$ будет делиться на 6^3, и «оставшийся» множитель должен быть кубом. Эти рассуждения приводят к бесконечной серии: $x = 6m^3 - 1,\ y = 6m^2,\ z = 6m^3 + 1,\ m \in \mathbb{Z}$. При $m > 0$ они будут натуральными.

Для $i = 1$ получаем такой список решений:

$$\begin{gathered}
x = 8, \quad y = 6, \quad z = 9 \\
x = 138, \quad y = 71, \quad z = 144 \\
x = 138, \quad y = 135, \quad z = 172 \\
x = 426, \quad y = 372, \quad z = 505 \\
x = 486, \quad y = 426, \quad z = 577 \\
x = 720, \quad y = 242, \quad z = 729 \\
x = 812, \quad y = 791, \quad z = 1010 \\
x = 823, \quad y = 566, \quad z = 904 \\
x = 1207, \quad y = 236, \quad z = 1210 \\
x = 2292, \quad y = 575, \quad z = 2304 \\
x = 2820, \quad y = 1938, \quad z = 3097 \\
x = 3230, \quad y = 2676, \quad z = 3753 \\
x = 5610, \quad y = 1124, \quad z = 5625 \\
x = 5984, \quad y = 2196, \quad z = 6081 \\
x = 6702, \quad y = 1943, \quad z = 6756 \\
x = 8675, \quad y = 1851, \quad z = 8703
\end{gathered}$$

Закономерность не так очевидна на первый взгляд, но если присмотреться, то видно, что среди z есть степени тройки (1-я и 6-я строчки). Дальнейшее исследование привело к бесконечной серии решений, где $z = 3^{4m-2}$. Но тем же методом внимательного вглядывания удалось обобщить это решение (здесь на мысль натолкнули строчки, в которых $z = 144 = 2^4 \times 3^2$, $z = 2304 = 2^8 \times 3^2$, $z = 5625 = 3^2 \times 5^4$). Окончательно удалось получить серию $x = 3m(3m^3 - 1),\ y = 9m^3 - 1,\ z = 9m^4,\ m \in \mathbb{Z}$. Аналогично, при $m > 0$ они натуральные. К сожалению, эти формулы описывают не все решения.

Можно обратить внимание, что тем самым построены бесконечные серии для уравнений, в которых i является кубом или удвоенным кубом.

Наконец, $i = 4$. В заданном диапазоне нет ни одного решения этого уравнения, поэтому будем доказывать, что их не существует. Стандартный способ — найти модуль M такой, чтобы было неразрешимо уравнение $x^3 + y^3 - z^3 + i = 0 \pmod{M}$. Вновь прибегнув к компьютеру, такой модуль удалось найти: $M = 9$. Любой куб сравним с 0 или ± 1 по модулю 9, значит выражение $x^3 + y^3 - z^3$ принимает значения в диапазоне от -3 до 3, отсюда при $i = 9k \pm 4,\ k \in \mathbb{Z}$ уравнение решений не имеет.

Ответ: При $i = 1,\ i = 2$ — бесконечно много решений, при $i = 4$ — ни одного.
