MM234

Дзюбенко В.А.

Функция $g(n)$ натурального аргумента n задается так: Пусть n натуральное число. Определим $f(n)$ как число, полученное удалением последней цифры из десятичной записи n, увеличенное на квадрат этой цифры.
Например, $f(576) = 57 + 36 = 93$.
Тогда $g(n) = |\{n, f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \dots\}|$.
Пусть a и b – 2018-значные числа. Может ли оказаться, что $g(a) = g(b) + 26$?

Да, может. Например, $a = 906 \times 10^{2015}$, $b = 89 \times 10^{2016}$. Тогда $g(a) = 2043$, $g(b) = 2017$.

Дадим ответ на следующий вопрос. Пусть a — n-значное число. Какие значения может принимать функция $g(a)$?

Сначала докажем несколько утверждений про функцию $f(a)$.

Утверждение 1. *Пусть $a \geq 90$. Тогда $f(a) < a$.*

Доказательство. Запишем a как $a = 10x + y$, $0 \leq y \leq 9$. Из условий утверждения $x \geq 9$.

Тогда $f(a) = x + y^2 \leq x + 9 \times 9 \leq x + 9x \leq 10x + y = a$.

Если $a = 90$, то $f(a) = 9 < a$. В противном случае выполняется $x > 9$ или $y > 0$, и одно звено в цепочке неравенств, приведённой выше, становится строгим. □

Число 90 взято не случайно: если $a = 89$, то $f(a) = 8 + 81 = 89$ — неравенство не выполняется.

Утверждение 2. *Пусть $a < 90$. Тогда $f(a) < 90$.*

Доказательство. Здесь $a = 10x + y$, $0 \leq y \leq 9$, $x < 9$.

$f(a) = x + y^2 < 9 + 9^2 = 90$. □

Значит, при многократном взятии f от произвольного натурального числа a оно сначала строго монотонно уменьшается до значения, меньшего 90, а затем пробегает ещё некоторые значения, лежащие в диапазоне $\{1, 2, \dots, 89\}$.

Обозначим a_i — число, получаемое вычислением i раз функции f от a, i целое неотрицательное. Например, $a_2 = f(f(a))$, $a_0 = a$. Обозначим k — такое число, что $a_k < 90$, $a_{k-1} \geq 90$, т.е. номер первого получаемого числа, которое меньше 90. Тогда, как следствие из вышесказанного, справедливо равенство

$$g(a) = k + g(a_k).$$

Ведь множество $\{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$ включает в себя, с одной стороны, числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, которые не меньше 90 и все различны, а с другой стороны числа $a_k, f(a_k), f(f(a_k)), \dots$, каждое из которых меньше 90 и коих ровно $g(a_k)$ по определению функции g. Если $k = 0$, то первый набор просто не содержит чисел.

Те же самые рассуждения, кстати, можно применить и к двузначным числам: т.е. если a_k — первое двузначное число в последовательности, то формула $g(a) = k + g(a_k)$ также верна. И это будет удобнее использовать далее.

Значит нужно для начала исследовать поведение функции g на двузначных (ну и однозначных тоже) числах. А ведёт она себя довольно непредсказуемо, поэтому просто посчитаем значения на компьютере. Таблицу значений приведу в конце документа, здесь только вывод из неё — на двузначных числах функция принимает значения из множества $\{1, 2, \dots, 26\} \setminus \{14\}$.

Теперь надо разобраться, «как быстро» число может уменьшаться до двузначного при многократном взятии f. Понятно, что при $n \geq 2$ n-значное число не может стать $(n-2)$-значным и менее: оно теряет только один десятичный знак, и к этому значению ещё может что-то прибавиться. Увеличиться число десятичных знаков тоже не может. Но оно может сохраниться, нужно изучить этот случай.

Назовём число a почти степенью десяти, если $a = 10^m + t$, где $0 \leq t < 90$, $m > 1$. Тогда $f(a) = 10^{m-1} + f(t)$ (нетрудно понять), $0 \leq f(t) < 90$. И если $m > 2$, то $f(a)$ тоже является почти степенью десяти. А если $m = 2$, то $f(a) = 10 + f(t) < 10 + 90 = 100$ — двузначное.

Значит, если $a_0 = 10^m + t$ — почти степень десяти, то последовательное взятие f уменьшает число знаков этого числа ровно на 1, пока оно не станет двузначным, а произойдёт это на $(m-1)$-ом взятии: $a_{m-1} < 100$.

Теперь представим, что $a = 10x + y$ — n-значное, $f(a) = x + y^2$ — тоже n-значное ($n > 2$). Тогда $x < 10^{n-1}$ (из n-значности числа a), и $f(a) < 10^{n-1} + y^2 \leq 10^{n-1} + 81$, следовательно $f(a)$ является почти степенью десяти.

Рассмотрим $a = a_0 > 100$, $a_i = f(a_{i-1})$, a_{k+1} — первое двузначное число в последовательности, и для некоторого l число знаков a_l и a_{l+1} совпадают. Тогда числа $a_{l+1},\ a_{l+2}, \dots,\ a_k$ — почти степени десятки, и поэтому каждое из них имеет на одну цифру меньше предыдущего.

Отсюда вывод: n-значное число становится двузначным после $(n-2)$, либо после $(n-1)$ взятий функции f от него. И поскольку для двузначных a выполняется $1 \leq g(a) \leq 26$, значит при $n > 2$ для n-значных a выполняется $n - 1 \leq g(a) \leq n + 25$.

Теперь покажем, что $g(a)$ принимает все эти значения при $n > 2$. При $n = 3$ легко, приписав к соответствующим двузначным числам 0, получить значения $\{2,3,\ldots,27\}\setminus\{15\}$. При $a=994$ достигается значение 15, а при $a=906$ достигается значение 28. Они были найдены из простых соображений: например, из первого при вычислении f должна получаться трёхзначная почти степень десятки, из которой при вычислении f получится 36, $g(36)=13$. Про второе число аналогично. А при $n>3$ можно, приписав нужное количество нулей к этим числам, получить все значения из промежутка от $n-1$ до $n+25$. На этом решение поставленного вопроса окончено.

Ответ: Множество значений g на однозначных числах: $\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 14,\ 17,\ 18,\ 23\}$, на двузначных: $\{1,\ldots,26\}\setminus\{14\}$, на n-значных при $n>2$ $\{n-1,\ldots,n+25\}$

---

n	$g(n)$		n	$g(n)$		n	$g(n)$		n	$g(n)$		n	$g(n)$
0	1		20	8		40	7		60	15		80	18
1	1		21	4		41	19		61	24		81	2
2	7		22	15		42	18		62	3		82	20
3	3		23	9		43	4		63	10		83	21
4	6		24	10		44	9		64	16		84	11
5	18		25	17		45	23		65	8		85	21
6	14		26	8		46	8		66	19		86	10
7	23		27	16		47	23		67	6		87	7
8	17		28	20		48	26		68	25		88	10
9	2		29	22		49	22		69	8		89	1
10	2		30	4		50	19		70	24		90	3
11	8		31	7		51	15		71	18		91	3
12	19		32	24		52	3		72	9		92	4
13	3		33	20		53	22		73	6		93	10
14	21		34	22		54	5		74	10		94	18
15	9		35	21		55	5		75	25		95	23
16	5		36	13		56	20		76	5		96	24
17	20		37	4		57	6		77	21		97	10
18	9		38	7		58	9		78	19		98	7
19	21		39	12		59	11		79	11		99	4

Таблица значений g на однозначных и двузначных числах