MM217

Дзюбенко В.А.

5 ноября 2016 г.

Диагонали AC_1 и BD_1 шестигранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все грани которого четырехугольны, пересекаются в точке O. Могут ли остальные пары диагоналей скрещиваться?

Решение:
Поскольку $AC_1 \cap BD_1$, точки A, B, C_1 и D_1 лежат в одной плоскости, обозначим эту плоскость π (на иллюстрации выделена серым). При этом возможны два случая:

1. $AB \cap C_1D_1 = O$;
2. $AB \parallel C_1D_1$.

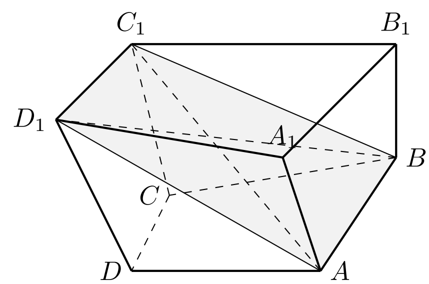

Рис. 1: Иллюстрация

В первом случае, $AB \cap C_1D_1 = O$. Точка O принадлежит прямым AB и C_1D_1, которые являются пересечениями плоскостей: $AB = (ABCD) \cap (ABB_1A_1)$, $C_1D_1 = (A_1B_1C_1D_1) \cap (DCC_1D_1)$. Значит, точка O принадлежит всем этим плоскостям. Она принадлежит прямой A_1B_1, так как является общей для плоскостей $(A_1B_1C_1D_1)$ и (ABB_1A_1). И аналогично, она принадлежит прямой CD. Иными словами, $A_1B_1 \cap CD = O$, то есть прямые A_1B_1 и CD лежат в одной плоскости, а значит, диагонали A_1C и B_1D исходного многогранника тоже лежат в одной плоскости и не являются скрещивающимися.

Во втором случае $AB \parallel C_1D_1$. Покажем, что тогда справедливо $A_1B_1 \parallel CD \parallel AB \parallel C_1D_1$. Предположим, что это не так. Прямая CD лежит в одной плоскости с прямой AB и не параллельна ей. Значит, она пересекает её: $CD \cap AB = O_1$. Аналогично, $CD \cap C_1D_1 = O_2$. При этом $O_1 \neq O_2$, поскольку AB и C_1D_1 не пересекаются. Получаем, что $CD \cap \pi = O_1$, $CD \cap \pi = O_2$. Но это невозможно, прямая может пересекать плоскость только в одной точке. Противоречие. Значит, $CD \parallel AB \parallel C_1D_1$. Аналогично доказываем это и для A_1B_1. Итак, $A_1B_1 \parallel CD$, значит они лежат в одной плоскости, и диагонали A_1C и B_1D не являются скрещивающимися.

Ответ: Не могут.