MM213

1. Пусть $H = \{h_1, h_2, \dots, h_f\}$, где f – количество граней, а h_i – число сторон i-й грани. Какое наименьшее значение может принимать $f - |H|$?

2. Пусть g_i означает число i-угольных граней многогранника для каждого значения i. Могут ли все g_i не превышать 2?

Решение

1. Пусть максимальное число сторон k имеет k-угольная грань многогранника, тогда $H \subset \{3, 4, \dots, k\}$, отсюда $|H| \le k - 2$, или

$$-|H| \ge 2 - k$$

Так как по ребру соединяются ровно две грани, соответственно данный многогранник помимо k-угольной грани имеет как минимум k других граней, имеющих с исходной общее ребро, значит, $f \ge k + 1$. Прибавляя полученное выше неравенство, получаем

$$f - |H| \ge 3$$

Значит, наименьшее значение $f - |H|$ составляет 3. В том, что это значение достижимо, нет никаких сомнений, примерами могут служить тетраэдр, треугольная призма или четырёхугольная пирамида.

Ответ: 3.

2. Определим k так же, как в пункте 1. Можно найти многогранник такой, что $\forall\ i \in [3; k]\ g_i = 2$. Точнее, два многогранника, для $k = 5$ и $k = 6$.

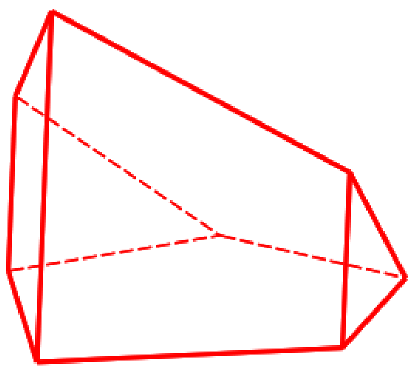

Рис. 1.
$k = 5$

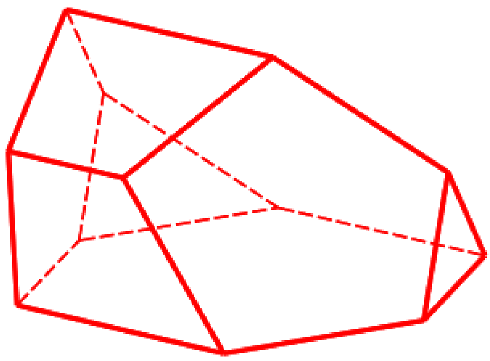

Рис. 2.
$k = 6$

Эстетическая оценка: 4 балла