**ММ215** (4 балла)

На какое наименьшее количество тетраэдров можно разрезать шестиугольную призму?

Ответ: 10 (в том смысле, что любую выпуклую 6-гранную призму можно разбить на 10 тетраэдром, и никакую нельзя разрезать на меньшее число тетраэдров).

Решение: выберем 6 вершин призмы, попарно несмежных. Для каждой из этих вершин отрежем от призмы тетраэдр, одна из вершин которого – сама эта вершина призмы, а три ребра – ребра призмы, выходящие из этой вершины. Тогда от призмы останется выпуклый октаэдр, который разбивается на четыре тетраэдра четырьмя треугольниками, содержащими в качестве одной из сторон одну и ту же внутреннюю диагональ четырехугольника, а в качестве противоположных этой стороне вершин – вершины октаэдра, не являющихся концами этой диагонали. Итого, вся призма разрезается на 10 тетраэдров.

Покажем, что меньше, чем на 10 тетраэдров призму разбить нельзя. Каждая грань призмы разбивается на треугольные грани тетраэдров разбиения. Шестиугольные стороны призмы можно разбить минимум на 4 треугольника каждую. Но каждый тетраэдр разбиения может содержать не более одной грани, лежащей на параллельных шестиугольных сторонах призмы. Таким образом, тетраэдров разбиения, имеющих грани на шестиугольных основаниях призмы, не меньше 8. Суммарный объем 4 тетраэдров, имеющих грани, лежащие на одном из 6-угольных оснований призмы, не превосходит 1/3 от объема всей призмы, а значит объем всех 8 тетраэдров, имеющих стороны на основаниях призмы, не больше 2/3 объема призмы. Значит, оставшуюся треть объема призмы должны занимать дополнительные тетраэдры.

Таких тетраэдров должно быть не меньше двух, так как один тетраэдр, находящийся внутри произвольной шестиугольной призмы, не может иметь объем, равный одной 1/3 объема шестигранной призмы. Действительно, спроецируем тетраэдр параллельно боковым сторонам призмы на основания призмы - получим две треугольные или четырехугольные проекции, находящиеся внутри шестиугольных оснований. Соединим соответствующие стороны этих проекций плоскостями, параллельными боковым ребрам призмы - получим вложенную в шестиугольную призму трех- или четырехугольную призму (а значит, имеющую объем строго меньший, чем шестиугольная призма), в которую, соответственно, вложен тетраэдр. Несложный разбор возможных случаев (который я опускаю из-за его чисто технического характера и в силу неудобности словесного описания или рисования пространственных конфигураций) показывает, что вложенный таким образом в 3- или 4-угольную призму тетраэдр содержит не более 1/3 объема этой призмы, а значит строго меньше 1/3 объема 6-угольной призмы.