**ММ235** (7 баллов).

**Существует ли выпуклый многогранник, у которого равны: количество ребер; количество диагоналей; суммарное количество диагоналей граней?**

Ответ: существует.

Обозначим – количество вершин, граней и ребер искомого многогранника.

Из каждой вершины к другим вершинам выходит отрезков, среди которых есть ребра, диагонали и диагонали граней многогранника. Суммируя по всем вершинам, получаем:

Поскольку сумма числа сторон во всех гранях равна , и все грани имеют не меньше трех сторон, то . Отсюда и из соотношения получаем соотношение . Тогда для искомого многогранника выполняется неравенство . При таких допустимыми для многогранников тройками значений удовлетворяющих равенству , являются:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **В** | **Р** | **Г** |
| 10 | 15 | 7 |
| 12 | 22 | 12 |
| 13 | 26 | 15 |
| 15 | 35 | 22 |
| 16 | 40 | 26 |

Пусть - вектор граней исходного многогранника (в терминах определений, данных в ММ23). Тогда должны одновременно выполняться равенства:

(0, 2, 5, 9, 14 – количества диагоналей выпуклых 3-, 4-, 5-, 6-, 7-угольников).

Более того, если многогранник, удовлетворяющий этим условиям и равенству существует, то он будет являться искомым.

Всем перечисленным условиям удовлетворяют следующие наборы чисел (перечислены только ненулевые ):

Оба набора чисел реализуются. На рисунке я изобразил примеры плоских графов с заданными наборами валентностей граней (грань с наибольшей валентностью на каждом рисунке – внешняя), которые легко «натягиваются на глобус» в виде выпуклого многогранника. Синим цветом обозначены диагонали многогранников, их число в каждом примере равно , как и должно быть.

