**ММ236** (7 баллов). **Натуральные числа от 1 до  разбили на четыре группы по  чисел в каждой. Оказалось, что произведение всех чисел из первой группы равно произведениям всех чисел из второй и третьей групп. Найти наименьшую возможную сумму чисел четвертой группы.**

Ответ: 270.

Решение: для того, чтобы указанное разбиение было возможно, необходимо, чтобы из $4n$ можно было выбрать $n$ чисел (четвертую группу) так, чтобы произведение оставшихся $3n$ чисел было кубом. Для этого нужно, чтобы в разложение в произведение этих $n$ чисел вошли по крайней мере те простые множители, которые в разложение $(4n)!$ входят в степенях, не кратных 3, и чтобы степени вхождений этих простых множителей в разложение произведения чисел четвертой группы были не меньше остатка от деления на 3 степени вхождения этих простых множителей в разложение $(4n)!$ Учет этого ограничения показывает, что при $n<10$ условие задачи не может быть соблюдено.

При $n=10$ условия задачи может быть соблюдено, при этом четвертая группа определяется однозначно – это $\{14, 17, 19, 23, 28, 29, 31, 34, 37, 38\}. $Сумма этих чисел равна 270. Оставшиеся числа можно разбить на три группы по 10 чисел с одинаковыми произведениями $186810624000=2^{11}\*3^{6}\*5^{3}\*7\*11\*13$, например {4, 6, 7, 8, 9, 22, 24, 25, 30, 39}, {1, 5, 10,12, 20, 21, 26, 27, 32, 33} и {2, 3, 11, 13, 15, 16, 18, 35, 36, 40}.

При $n=11$ в четвертую группу заведомо должны входить числа 43, 41, 37, 31, 29, 23, 19, 38, 17, 34 – а их сумма уже больше 270.

Пусть при $n\geq 12$ существует требуемое разбиение с суммой чисел в четвертой группе меньше 270. Но поскольку числа в четвертой группе не меньше, чем натуральные от 1 до n, то выполняется неравенство $\frac{n\left(n+1\right)}{2}<270$, откуда $12\leq n\leq 22$. Но тогда $48\leq 4n\leq 88$, и в разложение $(4n)!$ входят простые множители 31, 37, 41, 43, 47, но в степенях, меньших 3. Значит, числа 31, 37, 41, 43, 47 заведомо входят в четвертую группу, а значит условие того, что сумма элементов четвертой группы меньше 270, усиливается до $31+37+41+43+47+\frac{(n-5)\left(n-4\right)}{2}<270$, откуда уже $12\leq n\leq 16$. Но тогда еще и 23, 29 и 46 заведомо входят в четвертую группу, а $23+29+31+37+41+43+46+47=251$, и сумма оставшихся чисел не больше 18, откуда уже $12\leq n\leq 13$. Но тогда еще и 19 и 38 входят в четвертую группу, и сумма чисел в четвертой группе уже не меньше 270. Значит, искомого разбиения с суммой чисел в четвертой группе меньше 270 не существует.