**ММ237** (7 баллов).

**Студент математического факультета Вася Пупкин написал на доске некоторую перестановку из  в виде произведения независимых циклов (запись каждого цикла начинается с наименьшего элемента; опускались ли в записи циклы длины 1 - неизвестно). Васины однокурсники прокомментировали эту запись.

Аня:  – тождественная перестановка.
Ваня: Длины всех циклов – числа Фибоначчи.
Даня: В  существует ровно 3 перестановки, квадрат которых равен .
Маня: Хм, уравнение  не может иметь в  ровно 3 решения ни при каком .
Саня: Более того, количество решений уравнения  в  не может быть нечетным ни при каком .
Таня: Квадрат наибольшего элемента в самом длинном цикле меньше порядка .
Зина:  имеет столько же циклов, сколько и 
Лина: Внутри всех циклов элементы строго возрастают.
Нина: Произведение всех элементов одного из циклов кратно произведению всех элементов более длинного цикла и сумме всех элементов более короткого.
Фаина: Зина, Лина и Нина правы.**

**Вася (умница и отличник) заметил, что количество верных утверждений его однокурсников равно наибольшей длине цикла в .
Найдите .**

В условии задачи это не сказано явно, но по смыслу высказываний студентов, видимо, надо понимать, что речь идет о перестановках множества чисел от 1 до 10, а не произвольного множества из 10 элементов.

Условие, что запись каждого цикла начинается с наименьшего элемента, лишнее.

Ответ:$ A=(12345)(6810)(79)$

Решение:

Маня права – уравнение  не имеет ровно 3 решения вообще ни для каких перестановок. Действительно, квадрат цикла четной длины $2n$ является произведением двух независимых циклов длины $n$, при этом существует ровно $n$ циклов длины $2n$, квадраты которых дают данное произведение независимых циклов длины $n$. Квадрат цикла нечетной длины дает цикл той же длины из тех же элементов, и существует ровно один цикл нечетной длины, квадрат которого равен заданному циклу нечетной длины. Таким образом, в частности, квадрат любого цикла не может содержать независимые циклы разной длины. Разобьем перестановку $B$ на произведение независимых перестановок, каждая из которых равна произведению независимых циклов одинаковой длины в $B$: $B=B\_{1}…B\_{k}$ . Все множество элементов разобьем на непересекающиеся подмножества элементов, участвующих в перестановках $B\_{i}$ (для каждого i). Тогда, если , то и $X$ разбивается в произведение независимых перестановок $X=X\_{1}…X\_{k}$, таких что $X\_{i}^{2}=B\_{i}$, и количество решений уравнения  равно произведению количеств решений уравнений $X\_{i}^{2}=B\_{i}$ для каждого $i$, на множествах элементов, участвующих в $B\_{i}$. Поэтому, чтобы  имело 3 решения, нужно, чтобы у какого-то уравнения $X\_{i}^{2}=B\_{i}$, где $B\_{i}$ – произведение некоторого числа независимых циклов одинаковой длины, было ровно 3 решения, но простой перебор вариантов показывает, что это невозможно.

Таким образом, Даня заведомо неправ.

Саня тоже неправ, так как при В = (123456789) уравнение  имеет одно решение Х = (162738495).

Наибольшая длина цикла в А не равна 8, 9 и 10, так как иначе, кроме Дани и Сани, не права Аня, и число верных утверждений не больше 7.

Наибольшая длина цикла в А не равна 7, так как иначе кроме Дани и Сани, не правы Аня и Ваня, и число верных утверждений не больше 6.

Наибольшая длина цикла не равна 1,2 или 3, так как иначе Аня, Маня, Ваня и Зина заведомо правы, то есть число верных утверждений больше наибольшей длины цикла.

Наибольшая цикла не равна 4, так как иначе Аня, Ваня, Даня, Саня и Таня неправы, Маня и Зина правы, а из Лины, Нины и Фаины не могут быть правы ровно двое, то есть общее количество верных высказываний не равно наибольшей длине цикла.

Если наибольшая длина цикла 6, то заведомо правы Аня, Маня, Зина, заведомо неправы Ваня, Даня, Саня и Таня. Значит Лина, Нина и Фаина должны быть правы. Но то, что права Нина означает, в частности, что в перестановке есть цикл, для которого существует циклы и большей и меньшей длины, что означает, что перестановка разбивается на циклы длиной 1, 3 и 6. Произведение трех элементов кратно произведению элементов длинного цикла только в случае, если циклы равны (123456), (8910) и (7) но произведение 8\*9\*10 не делится на 7, то есть Нина не может быть права, противоречие.

Таким образом, наибольшая длина цикла равна 5. В этом случае заведомо права только Маня, заведомо неправы Аня, Даня, Саня, Зина, а значит и Фаина. Значит правы должны быть также Ваня, Таня, Лина и Нина. В самом длинном цикле наибольший элемент не меньше 5, поэтому, поскольку Таня права, порядок перестановки больше 25, а это возможно, только если $A$ раскладывается на циклы длины 2, 3 и 5, причем, поскольку Лина права, цикл длины 5 – это (12345). Правота Вани соблюдена, осталось соблюсти правоту Нины и Лины. Произведение трех чисел из первого десятка, больших пяти, кратно 120, поэтому это либо 8, 9 и 10, но тогда цикл длины 2 это (67),а 8\*9\*10 не делится на 6+7, либо 6, 8 и 10, и тогда 6\*8\*10 кратно сумме 7+9. Поскольку Лина права, это означает, что $A=(12345)(6810)(79)$.