**ММ238** (7 баллов).

**Вася написал на доске $k$ последовательных натуральных чисел и нашел их НОК - $V$.  
Петя написал $k$ последовательных натуральных чисел, больших Васиных, и тоже нашел их НОК - $P$.   
Оказалось, что $2018 < \frac VP < 2019$. При каком наименьшем $k$ такое возможно?**

Ответ: при

Решение: Пусть – Васино произведение подряд идущих чисел, , – Петино произведение подряд идущих чисел, . Тогда , а поскольку , то .

Отношение произведения подряд идущих чисел к их НОД может состоять только из простых множителей, меньших . Для каждого такого простого множителя кратных ему среди Васиных чисел либо столько же, сколько среди Петиных, либо отличается от Петиного количества на один, что может быть только в том случае, если не кратно этому простому множителю. В разложение величины любой такой простой множитель может входить максимум в степени, равной целой части от логарифма по основанию этого простого множителя.

Поэтому, как легко убедиться непосредственно, для всех отношение не может быть больше 2018, и значит ситуация, описанная в условии, невозможна.

В то же время, при описанная ситуация возможна.

Пусть первое число Пети имеет вид . Тогда среди Петиных чисел по два числа, делящихся на 7, 8 и 9, и три числа, делящихся на 5. .

Пусть первое число Васи имеет вид . Тогда среди Васиных чисел есть по одному числу, делящемуся на 7, 8 и 9, и два числа, делящихся на 5. , и, значит .

Осталось подобрать числа А > B, так, чтобы При требуемые неравенства удовлетворяются, так как при таких А и В каждое Васино число, поделенное на соответствующее Петино, удовлетворяет неравенствам:

(для всех от 0 до 10).