**ММ238** (7 баллов).

**Вася написал на доске  последовательных натуральных чисел и нашел их НОК - .
Петя написал  последовательных натуральных чисел, больших Васиных, и тоже нашел их НОК - .
Оказалось, что . При каком наименьшем  такое возможно?**

Ответ: при $k = 11$

Решение: Пусть $X\_{V }$ – Васино произведение $k$ подряд идущих чисел, $Z\_{V} = X\_{V}/V$, $X\_{P }$ – Петино произведение $k$ подряд идущих чисел, $Z\_{P} = X\_{P}/P$. Тогда $2018<\frac{V}{P}=\frac{\frac{X\_{V}}{Z\_{V}}}{\frac{X\_{P}}{Z\_{P}}}=\frac{X\_{V}}{X\_{P}}∙\frac{Z\_{P}}{Z\_{V}}$, а поскольку $\frac{X\_{V}}{X\_{P}}<1$, то $\frac{Z\_{P}}{Z\_{V}}>2018$.

Отношение произведения $k$ подряд идущих чисел к их НОД может состоять только из простых множителей, меньших $k$. Для каждого такого простого множителя кратных ему среди Васиных чисел либо столько же, сколько среди Петиных, либо отличается от Петиного количества на один, что может быть только в том случае, если $k$ не кратно этому простому множителю. В разложение величины $\frac{Z\_{P}}{Z\_{V}}$ любой такой простой множитель может входить максимум в степени, равной целой части от логарифма $k$ по основанию этого простого множителя.

Поэтому, как легко убедиться непосредственно, для всех $k<11$ отношение $\frac{Z\_{P}}{Z\_{V}}$ не может быть больше 2018, и значит ситуация, описанная в условии, невозможна.

В то же время, при $k=11$ описанная ситуация возможна.

Пусть первое число Пети имеет вид $5\*7\*8\*9\*A$. Тогда среди Петиных чисел по два числа, делящихся на 7, 8 и 9, и три числа, делящихся на 5. $Z\_{P}=$ $5^{2}\*7\*2^{3}\*4\*8\*3^{2}\*9$.

Пусть первое число Васи имеет вид $1+5\*7\*8\*9\*В$. Тогда среди Васиных чисел есть по одному числу, делящемуся на 7, 8 и 9, и два числа, делящихся на 5. $Z\_{V}=$ $5\*2^{3}\*4\*3^{2}$, и, значит $\frac{Z\_{P}}{Z\_{V}}=5\*7\*8\*9=2520>2018$.

Осталось подобрать числа А > B, так, чтобы $\frac{2018}{2520}<\frac{X\_{V}}{X\_{P}}<\frac{2019}{2520}.$ При $В=49, А=50$ требуемые неравенства удовлетворяются, так как при таких А и В каждое Васино число, поделенное на соответствующее Петино, удовлетворяет неравенствам:

 $\sqrt[11]{\frac{2018}{2520}}<\frac{x+1+5\*7\*8\*9\*В}{x+5\*7\*8\*9\*A}<\sqrt[11]{\frac{2019}{2520}}$ (для всех $x$ от 0 до 10).