**ММ239** (10 баллов). Решения принимаются до 17.11.2018

**Существует ли выпуклый многогранник, у которого:  
a) не менее половины граней семиугольники;  
b) более половины граней семиугольники;   
с) не менее половины граней восьмиугольники;  
d) более половины граней восьмиугольники;  
e) не менее половины граней девятиугольники?**  
**Примечание: Если у вас получается, что ответ на пункт «а» отрицательный, а на пункт «b» - положительный, подумайте еще.**

Ответ: а), b), c), d) - существует, е) – не существует.

Решение: а) возьмем куб, и отсечем от него шесть маленьких тетраэдров около всех вершин куба, кроме двух противоположных. Получится 12-гранник, у которого 6 семиугольных граней (каждая сторона куба с тремя отрезанными углами) и 6 треугольных граней сечений.

b) возьмем два одинаковых выпуклых многогранника, каждый из которых гомеоморфен как сферический граф многограннику, построенному в пункте а, но имеет большую треугольную грань, на которую проектируется прямоугольной проекцией весь остальной многогранник. Склеим эти два многогранника по большой треугольной стороне, получим выпуклый 23-гранник, у которого 12 семиугольных и 11 треугольных граней.

с) возьмем икосаэдр и отсечем от него 12 маленьких тетраэдров около 12 вершин так, чтобы от каждой грани было отрезано ровно по 3 вершины. Так отрезать можно - чтобы сэкономить на рисунке, укажу общее правило: у каждой грани должны быть отсечены две соседние вершины и третья, им противоположная. Тогда выбор трех вершин одной из граней для отсечения согласно этому правилу однозначно определяет все вершины, которые требуется отрезать согласно этому же правилу. Каждый из 12 пятиугольников станет тогда восьмиугольником, и еще добавится 12 треугольных грани сечений.

d) возьмем два одинаковых выпуклых многогранника, каждый из которых гомеоморфен как сферический граф многограннику, построенному в пункте с, но имеет большую треугольную грань, на которую проектируется прямоугольной проекцией весь остальной многогранник. Склеим эти два многогранника по большой треугольной стороне, получим выпуклый 47-гранник, у которого 24 семиугольных и 23 треугольных грани.

e) Поскольку валентности всех вершин многогранника не меньше 3, и сумма валентностей вершин равна удвоенному числу ребер, то , а поскольку , то . В то же время сумма числа сторон граней равна 2Р, и если не менее половины граней девятиугольники, то среднее число сторон грани не меньше 6, то есть , что противоречит неравенству из предыдущего предложения, то есть таких многогранников нет.