**ММ248** (8 баллов)

**Найти наименьшее натуральное $k$ такое, что во множестве ровно 13 целых чисел.**

Ответ: 240

Решение. Введем обозначения:

,

,

Поскольку , если взаимно просто с , то в определении можно считать, что пробегает только те значения, которые не содержат в разложении простых множителей, не содержащихся в разложении .

Величина = зависит только от набора степеней, с которыми простые множители входят в разложения чисел и . При этом, если в кортеже степеней переставить каким-то образом элементы и одновременно произвести ту же перестановку в кортеже степеней , то величина не изменится. Таким образом, множество одинаково для всех , которые получаются из перестановкой элементов. Значит, для наименьшего искомого значения последовательность степеней в его разложение простых множителей не возрастает:

Заметим теперь, что , поскольку ровно 13 чисел представимы в виде :

Число 1 не представимо в виде , так как все три множителя больше 1. Числа больше 20 тоже не представимы, так как максимум всех трех дробей достигается при . Кроме того, если , то , а если , то либо делится на 5, либо , и значит, числа 13, 14, 16, 17, 18 и 19 тоже не представимы в виде .

Таким образом, наименьшее число, для которого , не больше , и имеет вид . Кроме того, наибольшее значение принимает при и равно , и не может принимать значение 1 при , поэтому заведомо если . Таким образом, возможными вариантами для искомого минимального для которого остаются только числа .

Прямая проверка, однако, показывает, что: