**ММ248** (8 баллов)

**Найти наименьшее натуральное  такое, что во множестве** $\left\{\frac{τ(kn}{τ(n)} | n\in N\right\}$ **ровно 13 целых чисел.**

Ответ: 240

Решение. Введем обозначения:

$a\left(k;n\right)=\frac{τ(kn)}{τ(n)}$,

$B\left(k\right)=\left\{целые числа вида a(k;n)|n\in N\right\}$,

$\left[m\_{2};m\_{3};m\_{5};…;m\_{p}\right]=2^{m\_{2}}∙3^{m\_{3}}∙5^{m\_{5}}∙…∙p^{m\_{p}}$

Поскольку $a\left(k;n\right)=a\left(k;c∙n\right)$, если $c$ взаимно просто с $k$, то в определении $B\left(k\right)$ можно считать, что $n$ пробегает только те значения, которые не содержат в разложении простых множителей, не содержащихся в разложении $k$.

Величина $a\left(\left[m\_{2};m\_{3};m\_{5};…;m\_{p}\right];\left[l\_{2};l\_{3};l\_{5};…;l\_{p}\right]\right) $= $\frac{\left(m\_{2}+l\_{2}+1\right)∙…∙\left(m\_{p}+l\_{p}+1\right)}{\left(l\_{2}+1\right)∙…∙\left(l\_{p}+1\right)}$ зависит только от набора степеней, с которыми простые множители входят в разложения чисел $k=\left[m\_{2};m\_{3};m\_{5};…;m\_{p}\right]$ и $n=\left[l\_{2};l\_{3};l\_{5};…;l\_{p}\right]$. При этом, если в кортеже степеней $\left[m\_{2};m\_{3};m\_{5};…;m\_{p}\right]$ переставить каким-то образом элементы и одновременно произвести ту же перестановку в кортеже степеней $\left[l\_{2};l\_{3};l\_{5};…;l\_{p}\right]$, то величина $a\left(\left[m\_{2};m\_{3};m\_{5};…;m\_{p}\right];\left[l\_{2};l\_{3};l\_{5};…;l\_{p}\right]\right) $ не изменится. Таким образом, множество $B\left(k\right)$ одинаково для всех $k$, которые получаются из $\left[m\_{2};m\_{3};m\_{5};…;m\_{p}\right]$ перестановкой элементов. Значит, для наименьшего искомого значения $k=\left[m\_{2};m\_{3};m\_{5};…;m\_{p}\right]$ последовательность степеней в его разложение простых множителей не возрастает: $m\_{2}\geq m\_{3}\geq m\_{5}\geq …\geq m\_{p}.$

Заметим теперь, что $\#(B\left(\left[4;1;1\right]\right))=13$, поскольку ровно 13 чисел представимы в виде $a\left(\left[4;1;1\right];[a;b;c]\right)$:

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[19;3;2\right]\right)=2$

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[19;3;0\right]\right)=3$

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[11;1;0\right]\right)=4$

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[15;0;0\right]\right)=5$

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[7;0;0\right]\right)=6$

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[2;1;0\right]\right)=7$

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[3;0;0\right]\right)=8$

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[1;1;0\right]\right)=9$

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[0;2;1\right]\right)=10$

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[0;9;0\right]\right)=11$

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[1;0;0\right]\right)=12$

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[0;1;0\right]\right)=15$

$a\left(\left[4;1;1\right];\left[0;0;0\right]\right)=20$

Число 1 не представимо в виде $a\left(\left[4;1;1\right];[a;b;c]\right)=\frac{a+5}{a+1}∙\frac{b+2}{b+1}∙\frac{c+2}{c+1} $, так как все три множителя больше 1. Числа больше 20 тоже не представимы, так как максимум всех трех дробей достигается при $a=b=c=0$. Кроме того, если $a>0$, то $\frac{a+5}{a+1}∙\frac{b+2}{b+1}∙\frac{c+2}{c+1}\leq \frac{6}{2}∙\frac{2}{1}∙\frac{2}{1}=12$, а если $a=0$, то либо $\frac{a+5}{a+1}∙\frac{b+2}{b+1}∙\frac{c+2}{c+1}$ делится на 5, либо $\frac{a+5}{a+1}∙\frac{b+2}{b+1}∙\frac{c+2}{c+1}\leq 5∙\frac{6}{5}∙\frac{2}{1}=12$, и значит, числа 13, 14, 16, 17, 18 и 19 тоже не представимы в виде $a\left(\left[4;1;1\right];[a;b;c]\right)$.

Таким образом, наименьшее число, для которого $\#(B(k))=13$, не больше $\left[4;1;1\right]=2^{4}∙3∙5=240$, и имеет вид $k=\left[m\_{2};m\_{3};m\_{5};…;m\_{p}\right]$ $m\_{2}\geq m\_{3}\geq m\_{5}\geq …\geq m\_{p}$. Кроме того, наибольшее значение $a\left(k;n\right)$ принимает при $n=1$ и равно $τ\left(k\right)=\left(m\_{2}+1\right)∙…∙\left(m\_{p}+1\right)$, и $a\left(k;n\right)$ не может принимать значение 1 при $k>1$, поэтому заведомо $\#(B\left(k\right))<13$ если $τ\left(k\right)<14$. Таким образом, возможными вариантами для искомого минимального $k$ для которого $\#(B\left(k\right))=13$ остаются только числа $144=\left[4;2\right], 180=\left[2;2;1\right], 192=\left[6;1\right], 210=\left[1;1;1;1\right], 216=\left[3;3\right], 240=[4;1;1]$.

Прямая проверка, однако, показывает, что:

$B\left(144\right)=\left\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 15\right\}, \#(B\left(144\right))=9$

$B\left(180\right)=\left\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18\right\}, \#(B\left(180\right))=11$

$B\left(192\right)=\left\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 14\right\}, \#(B\left(192\right))=7$

$B\left(210\right)=\left\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16\right\}, \#(B\left(210\right))=11$

$B\left(216\right)=\left\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 16\right\}, \#(B\left(216\right))=8$