**25-й юбилейный конкурс в рамках Математического марафона**

**ММ241** (4 балла) Решения принимаются до 06.09.2019

**При каких натуральных n множество $\{1, 2, …, n\}$ можно разбить на два подмножества так, что произведение элементов первого подмножества равно сумме элементов второго?**

Ответ: при любых n кроме 1, 2 и 4.

Решение: при n = 1, 2 и 4 разбиение невозможно, в чем легко убедиться, перебрав все возможные разбиения множества первых n чисел на два множества.

При n = 3 разбиение возможно: 3 = 1+2

В остальных случаях:

При нечетных в первое множество отберем числа . Сумма оставшихся чисел равна , что равно произведению чисел первого множества.

При четных в первое множество отберем числа . Сумма оставшихся чисел равна , что равно произведению чисел первого множества.

Эстетическая оценка задачи: 5 баллов.

**ММ242** (5 баллов) (по мотивам №19 ЕГЭ) Решения принимаются до 13.09.2019

**На сайте проводится опрос, кого из m номинированных футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует один раз за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленных до целого числа. После того, как проголосовали n посетителей, суммарный рейтинг номинантов составил 95%.**

**а) При каком наименьшем m такое возможно?**

**б) При каком наименьшем n такое возможно?**

**в) При каком наименьшем m+n такое возможно?**

Ответ: а) при m = 11 (одна футбольная команда); б) при n = 23; в) при m+n = 37

Решение: а) Суммарное количество дробных долей процента, отбрасываемых при округлении, для всех номинируемых футболистов должно быть не меньше пяти. Для каждого футболиста отбрасываемое количество дробных долей процента строго меньше 0,5 (иначе дробная доля процента прибавится к его рейтингу, а не отбросится). Если футболистов меньше 11, то суммарное количество отбрасываемых дробных долей процента строго меньше пяти – противоречие.

Голосование с требуемыми свойствами для 11 игроков возможно. Пусть из n = 31 посетителей за десятерых игроков проголосовали по 2 посетителя (и эти игроки получили рейтинги по 6 процентов), и за одного игрока проголосовали 11 посетителей (и его рейтинг равен 35 процентов), тогда сумма рейтингов 10\*6+35 = 95 процентов.

б-в) Пусть n = 23 и m = 14. Тогда возможно голосование с требуемыми свойствами: за 13 игроков голосует по одному посетителю (тогда рейтинг каждого из этих 13 игроков равен 4 процента), и за одного игрока голосует 10 посетителей (и его рейтинг равен 43 процента), тогда сумма рейтингов игроков 13\*4+43 = 95 процентов.

Меньшие значения n и m+n не достижимы. Так как общее количество игроков, за которое нужно проголосовать, не меньше 11, то и n не меньше 11, а если n больше 25, то ответы для пунктов б) и в) уже заведомо не лучше минимального. Рассматривая отбрасываемые (или прибавляемые) дробные доли процентов при всех возможных схемах голосования при n от 11 до 25 за 11 или больше игроков, легко убедиться, что суммарное количество рейтингов игроков в таких голосованиях всегда больше 95 процентов (кроме рассмотренного случая n = 23 и m = 14).

Эстетическая оценка задачи: 4 балла.

**ММ243** (5 баллов) Решения принимаются до 20.09.2019

**В треугольнике ABC $a<b<c$ и $a\cdot l_a=c\cdot l_c$. Найти угол $\beta$.**

Ответ: 60 градусов.

Решение: Углы будем обозначать в градусах. Удвоенная площадь треугольника равна , откуда, учитывая, что , получаем равенство синусов. Поскольку разные углы, то равенство синусов возможно только в случае, если углы под синусами дают в сумме развернутый угол: . Учитывая, что , получаем, что .

Эстетическая оценка задачи: 4 балла.

**ММ244** (6 баллов) Решения принимаются до 27.09.2019

**Галя предложила Ане, Боре и Васе такую загадку:**

**- Я задумала три попарно различных ненулевых цифры. Сейчас я по секрету сообщу Ане сумму квадратов, Боре произведение, а Варе сумму задуманных цифр. Попробуйте отгадать эти цифры.**

**Узнав сумму квадратов произведение и сумму, Аня, Боря и Вася сначала задумались, а затем разговорились:**

**А: Я не могу определить, что это за цифры.**

**Б: И я не могу.**

**В: И я тоже.**

**A: Тогда я их знаю!**

**Б: После этой реплики и я их знаю.**

**Что это за тройка цифр?**

**Примечание: У Ани, Бори и Васи все хорошо с арифметикой и логикой.**

Ответ: 1, 8, 9.

Решение: Поскольку Аня не смогла сразу определить цифры, ей сообщено число, которое представляется в виде суммы квадратов цифр разными способами. Для этого есть следующие возможности:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Число Ани | Цифры | Число Бори | Число Васи (Вари) |
| 149 | 2, 8, 9 | 144 | 19 |
| 149 | 6, 7, 8 | 336 | 21 |
| **146** | **1, 8, 9** | **72** | **18** |
| 146 | 4, 7, 9 | 252 | 20 |
| **122** | **3, 7, 8** | **168** | **18** |
| 122 | 4, 5, 9 | 180 | 18 |
| 110 | 2, 5, 9 | 90 | 16 |
| 110 | 5, 6, 7 | 210 | 18 |
| **101** | **1, 6, 8** | **48** | **15** |
| **101** | **2, 4, 9** | **72** | **15** |
| **101** | **4, 6, 7** | **168** | **17** |
| 98 | 1, 4, 9 | 36 | 14 |
| **98** | **3, 5, 8** | **120** | **16** |
| 94 | 2, 3, 9 | 54 | 15 |
| 94 | 3, 6, 7 | 126 | 16 |
| 90 | 1, 5, 8 | 40 | 14 |
| 90 | 4, 5, 7 | 140 | 16 |
| 86 | 1, 2, 9 | 18 | 12 |
| **86** | **1, 6, 7** | **42** | **14** |
| **77** | **2, 3, 8** | **48** | **13** |
| **77** | **4, 5, 6** | **120** | **15** |
| 74 | 1, 3, 8 | 24 | 12 |
| 74 | 3, 4, 7 | 84 | 14 |
| 69 | 1, 2, 8 | 16 | 11 |
| 69 | 2, 4, 7 | 56 | 13 |
| 62 | 1, 5, 6 | 30 | 12 |
| **62** | **2, 3, 7** | **42** | **12** |

Поскольку Боря после этого не знал цифр, у него число, которое в столбце «Число Бори» встречается несколько раз, то есть 42, 84, 72, 120 или 168 (одинаковые числа выделены одинаковым цветом). Поскольку Вася после этого не знал цифр, его число встречается несколько раз в строчках, соответствующих указанным значениям в столбце чисел Бори – то есть 15 или 18. Так как после этого Аня знает цифры, то у нее не может быть числа 101 (поскольку в этом случае есть еще два возможных набора цифр, отвечающих всем предыдущим репликам), а, значит, у Ани число 146 (при наборе цифр 1, 8, 9 и числе 72 у Бори), 122 (набор цифр 3, 7, 8 и число 168 у Бори) или 77 (набор цифр 4, 5, 6 и число 120 у Бори). Зная свое число Боря, разумеется, теперь знает и цифры. Но в его реплике указано также, что он узнал цифры только после второй реплики Ани, а значит, его число не может быть 120 или 168, иначе Боря однозначно знал бы цифры уже после Васиной реплики. Значит, загаданные цифры – 1, 8 и 9.

Эстетическая оценка: 5 баллов.

**ММ245** (5 баллов) Решения принимаются до 04.10.2019

**В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Найти отношение площадей треугольников ABH и CBH, если первый из них подобен треугольнику из своих медиан, а второй – треугольнику из своих высот.**

Ответ:

Решение: Пусть – стороны произвольного прямоугольного треугольника.

Медианы этого треугольника равны Если треугольник подобен прямоугольнику из медиан, то выполняется равенство отношений длин соответствующих сторон: . Оба равенства выполняются одновременно, если .

Высоты прямоугольного треугольника равны . Если треугольник подобен треугольнику из своих высот, то выполняется равенство отношений длин соответствующих сторон: . Первое и третье отношения тождественны, а первое равенство дает , откуда, с учетом того, что , следует, что , и тогда .

Перейдем к остроугольному треугольнику АВС. Высота ВН разбивает его на два прямоугольных треугольника с общим катетом ВН, поэтому площади этих треугольников относятся как вторые катеты в треугольниках АВН и СВН. В треугольнике АВН, подобном треугольнику из своих медиан, АН является коротким катетом, поскольку иначе угол АВС заведомо окажется тупым, что противоречит условию. Поэтому АН2 = ½\*ВН2. В треугольнике же СВН катет СН может быть как длинным, так и коротким, то есть СН = ВН или СН = ВН. Отсюда следует, что АН относится к СН как .

Эстетическая оценка: 4 балла.

**ММ246** (7 баллов) Решения принимаются до 11.10.2019

**Сколько (с точностью до подобия) существует разносторонних треугольников, разрезаемых на два равнобедренных более чем одним способом?**

Ответ: три треугольника с соотношениями углов 4:3:1; 6:2:1 и 9:3:1.

Решение: Пусть А > В > С – градусные меры углов треугольника. Треугольник разбивается на 2 треугольника только отрезком, делящим один из углов А, В или С на 2 угла. Оба треугольника разбиения получаются равнобедренными только в следующих случаях:

1. А разбивается на углы В и С. Тогда А – прямой угол.
2. А разбивается на углы С и 90-В/2. Тогда А = 3С.
3. А разбивается на углы С и 180-2В. Тогда В = 2С.
4. А разбивается на углы 90-С/2 и В. Тогда А = 3В.
5. В разбивается на углы С и 90-А/2. Тогда В = 3С.
6. В разбивается на углы С и 180-2А (при А < 90). Тогда А = 2С.

Любые два из разбиений 1) – 3) одновременно возможны только в случае А = 90, В = 60, С = 30, но во всех случаях это одно и то же разбиение на два равнобедренных треугольника – один из которых равносторонний.

Разбиения 1) и 4) одновременно не возможны, так как тогда В меньше С.

Разбиения 1) и 5) одновременно возможны, если А = 90, В = 67,5, С =22,5.

Разбиения 1) и 6) одновременно невозможны, так как в этом случае В = С.

Разбиения 2) и 4) одновременно невозможны, так как в этом случае В = С.

Разбиения 2) и 5) одновременно невозможны, так как в этом случае А = В.

Разбиения 2) и 6) одновременно невозможны, так как в этом случае С = 0.

Разбиения 3) и 4) одновременно возможны, если А = 120, В = 40, С = 20.

Разбиения 3) и 5) одновременно невозможны, так как в этом случае С = 0.

Разбиения 3) и 6) одновременно невозможны, так как в этом случае А = В.

Разбиения 4) и 5) одновременно возможны, если А = 9С, В = 3С, С = 180/13.

Разбиения 4) и 6) одновременно невозможны, так как в этом случае В < С.

Разбиения 5) и 6) одновременно невозможны, так как в этом случае В > А.

Эстетическая оценка задачи: 5 баллов.

**ММ247** (7 баллов) Решения принимаются до 18.10.2019

**Пусть $k$ – фиксированное натуральное число. Для натуральных n определим функцию $f_k(n)=\frac{lcm(n, n+1,\dots, n+k-1)}{lcm(n+1, n+2\dots, n+k))}$**

**Найти наименьшие значения $f_5(n)$ и $f_9(n)$.**

Ответ: .

Решение: Введем обозначения:

,

*.*

.

Тогда:

.

Величина возрастает с ростом n при фиксированном k, поэтому принимает минимальное значение в интервале от 1 до первого такого n, для которого минимально, то есть принимает наименьшее, а - наибольшее значение для НОК k подряд идущих чисел.

Число будет принимать наименьшее значение 2, если четны, а делится на 3. Число будет принимать набольшее значение 24, если делятся на 4, а не делится на 3. Первое такое значение n, для которого , равно 12. Непосредственная проверка показывает, что , а при всех n, меньших 12, принимает большие значения.

Число будет принимать наименьшее значение 144, если четно, делится на 5 а оба не делятся на 7. Число будет принимать набольшее значение 40320, если делится на 8, а не делится на 5, а одно из чисел не делится на 7. Первое такое значение n, для которого , равно 560. Непосредственная проверка показывает, что , а при всех n, меньших 560, принимает большие значения. Для того чтобы упростить проверку, заметим, что для n, меньших чем 560, множитель по крайней мере в два раза больше чем 1/280, а значит достаточно проверить значения только для тех значениях n, для которых множитель меньше половины, то есть при n, меньших 9.

Эстетическая оценка: 4 балла.

**ММ248** (8 баллов) Решения принимаются до 25.10.2019

**Найти наименьшее натуральное $k$ такое, что во множестве $\left\{\frac{\tau(kn)}{\tau(n)}|n\in \mathbb N\right\}$ ровно 13 целых чисел.**

Ответ: 240

Решение. Введем обозначения:

,

,

Поскольку , если взаимно просто с , то в определении можно считать, что пробегает только те значения, которые не содержат в разложении простых множителей, не содержащихся в разложении .

Величина = зависит только от набора степеней, с которыми простые множители входят в разложения чисел и . При этом, если в кортеже степеней переставить каким-то образом элементы и одновременно произвести ту же перестановку в кортеже степеней , то величина не изменится. Таким образом, множество одинаково для всех , которые получаются из перестановкой элементов. Значит, для наименьшего искомого значения последовательность степеней в его разложение простых множителей не возрастает:

Заметим теперь, что , поскольку ровно 13 чисел представимы в виде :

Число 1 не представимо в виде , так как все три множителя больше 1. Числа больше 20 тоже не представимы, так как максимум всех трех дробей достигается при . Кроме того, если , то , а если , то либо делится на 5, либо , и значит, числа 13, 14, 16, 17, 18 и 19 тоже не представимы в виде .

Таким образом, наименьшее число, для которого , не больше , и имеет вид . Кроме того, наибольшее значение принимает при и равно , и не может принимать значение 1 при , поэтому заведомо если . Таким образом, возможными вариантами для искомого минимального для которого остаются только числа .

Прямая проверка, однако, показывает, что:

Эстетическая оценка задачи: 5 баллов

**ММ249** (10 баллов) Решения принимаются до 01.11.2019

**Пусть k – натуральное число и a – некоторая перестановка 2020-элементного множества. Может ли уравнение $x^k=a$ иметь ровно 2020 решений?**

Ответ: может

Решение: пусть , а перестановка раскладывается в произведение независимых циклов с длинами 1, 9, 9, 201, 201 и 1599. При возведении в квадрат цикл четной длины распадается на два цикла одинаковой длины, а цикл нечетной длины остается циклом той же длины. Значит, в перестановке элементы, образующие в циклы длины 1 и 1599 образуют циклы той же длины, и при этом однозначно определенные. Элементы, образующие в циклы длины 9, в либо тоже образуют циклы той же длины (однозначно определенные), либо образуют один цикл длины 18, в котором элементы каждого из циклов длины 9 идут через один. Есть ровно 9 таких циклов длины 18 – по одному для каждого способа расположить друг за другом по одному выбранному элементу из циклов длины 9. Итого, есть 10 способов того, какие циклы могут образовывать в те 18 элементов, которые в образуют два цикла длины 9. Аналогично, есть 202 способа того, какие циклы могут образовывать в те 402 элемента, которые в образуют два цикла длины 201. Итого есть 1\*1\*10\*202 = 2020 способов для построения перестановки , являющейся решением уравнения .

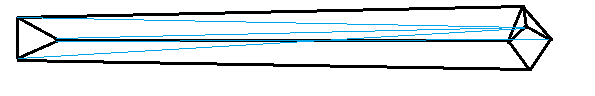
Эстетическая оценка: 4 балла.

**ММ250** (14 баллов) Решения принимаются до 29.11.2019

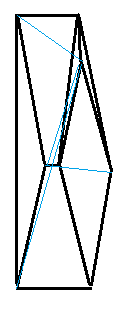
**Найти наименьшее возможное количество ребер выпуклого многогранника, у которого сумма длин ребер равна сумме длин диагоналей.**

Ответ: 13

Решение: Покажем, что существует многогранник с 13 ребрами, у которого суммы длин ребер и диагоналей равны.



Пусть у изображенного на рисунке жирными линиями многогранника (вид сверху) попарные расстояния между тремя вершинами в правой части рисунка и попарные расстояния между пятью вершинами в правой части рисунка пренебрежимо малы по сравнению с расстоянию между левой и правой частями рисунка. Тогда сумма ребер приблизительна равна длине трех ребер, соединяющих вершины из левой части рисунка с вершинами из правой части. Диагонали этого многоугольника выделены синим, их 4 штуки и все они соединяют вершины из левой части рисунка с вершинами из правой части рисунка. Значит, сумма длин диагоналей у такого многогранника больше суммы ребер.



Сдвинем теперь многогранник, сблизив левую и правую часть рисунка, получим многогранник, гомеоморфный исходному, примерно такой, как на втором рисунке. Будем считать, что вертикальные размеры рисунка много больше горизонтальных. Хорошо видно, что теперь сумма длин диагоналей меньше суммы длин сторон. Но поскольку при перетягивании вершин суммы длин диагоналей и ребер менялись непрерывно, в какой-то момент суммы длин диагоналей и ребер многогранника были равны.

Чтобы показать, что не существует многогранника с числом ребер, меньшим чем 12, проведем каталогизацию всех многогранников с числом ребер до 12 включительно с точностью до гомеоморфизма. Точнее, каждый многогранник представляет собой связный плоский (точнее, сферический) граф удовлетворяющий дополнительным свойствам:

а) все валентности вершин не меньше 3 и все валентности граней не меньше 3;

б) любые две грани либо не соприкасаются, либо соприкасаются в одной вершине, либо соприкасаются по одному ребру.

Мы проведем каталогизацию с точностью до гомеоморфизма и зеркальной симметрии всех таких графов с числом ребер, меньше 13. Верно ли обратное, что каждый такой граф реализуется в виде выпуклого многогранного тела, непросто сообразить, но, во всяком случае, все многогранники в наш каталог попадут.

Для составления каталога составим вспомогательную таблицу всех принципиально возможных количеств ребер, вершин и граней, а также наборов валентностей граней (удовлетворяющих условию а) для многогранников с количеством ребер до 12 включительно.

Количество ребер, вершин и граней сферического графа удовлетворяет равенству Эйлера: В-Р+Г=2. Суммы валентностей вершин и граней равны 2Р каждая, а поскольку все валентности не меньше 3, то и , откуда . Например, отсюда следует, что, оказывается, вообще не существует многогранников с 7 ребрами (о, сколько нам открытий чудных готовит марафон Лецко!).

Отрезок, соединяющий любые две вершины, является либо ребром многогранника, либо диагональю какой-то одной грани многогранника, либо диагональю многогранника. В таблице для каждого возможного набора параметров графа {Р, В, Г, набор валентностей граней}, вычислены также: суммарное число диагоналей граней ДГ; общее число отрезков, соединяющих вершины ; количество диагоналей графа . Если Д < 0, то указанный набор параметров не реализуется. Кроме того, некоторые наборы параметров не реализуются, потому что для них не выполняется указанное выше свойство б), этот факт указывается в последнем столбце таблицы.

Если граф с данным набором параметров существует, в последнем столбце таблицы указаны найденные мною количества графов с данным набором параметров, с указанием наборов валентностей вершин найденных графов. При этом учитывается, что у каждого сферического графа есть дуальный сферический граф, вершины которого лежат по одной на гранях исходного графа, и две вершины соединены ребром, если соответствующие грани исходного графа соприкасаются по ребру. Свойства а) и б) у графа и дуального графа удовлетворяются или не удовлетворяются одновременно. Количества и наборы валентностей граней и вершин у графа и дуального графа меняются местами. Поэтому, если не реализуется какой-то набор параметров {Р, В, Г, набор валентностей граней}, значит, не реализуется и соответствующий набор валентностей вершин для графа с числом граней В и числом вершин Г.

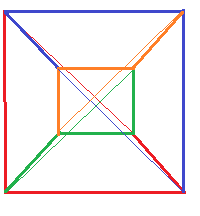
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Р** | **В** | **Г** | **Вал. граней** | **ДГ** | **О** | **Д** | **Многогранники** |
| 6 | 4 | 4 | 3333 | 0 | 6 | 0 | 1 (3333) тетраэдр |
| 8 | 5 | 5 | 33334 | 2 | 10 | 0 | 1 (33334) 4-пирамида |
| 9 | 5 | 6 | 333333 | 0 | 10 | 1 | 1 (33444) 2 склеенных по грани тетраэдра |
| 9 | 6 | 5 | 33336 | 9 | 15 | -3 | Не существует |
| 9 | 6 | 5 | 33345 | 7 | 15 | -1 | Не существует |
| 9 | 6 | 5 | 33444 | 6 | 15 | 0 | 1 (333333) 3-призма |
| 10 | 6 | 6 | 333335 | 5 | 15 | 0 | 1 (333335) 5-пирамида |
| 10 | 6 | 6 | 333344 | 4 | 15 | 0 | 1 (333344) призма с «согнутой» 4-гранью |
| 11 | 6 | 7 | 3333334 | 2 | 15 | 2 | 1 (334444) + 1 (333445) тетраэдр + 4-пирамида, склеенные по 3-грани |
| 11 | 7 | 6 | 333337 | 14 | 21 | -4 | Не существует |
| 11 | 7 | 6 | 333346 | 11 | 21 | -1 | Не существует |
| 11 | 7 | 6 | 333355 | 10 | 21 | 0 | Не существует (по свойству б) |
| 11 | 7 | 6 | 333445 | 9 | 21 | 1 | 1 (3333334) 4-пирамида со срезанным у основания углом |
| 11 | 7 | 6 | 334444 | 8 | 21 | 2 | 1 (3333334) |
| 12 | 6 | 8 | 33333333 | 0 | 15 | 3 | 1 (334455) + 1 (444444) октаэдр |
| 12 | 8 | 6 | 333339 | 27 | 28 | -11 | Не существует |
| 12 | 8 | 6 | 333348 | 22 | 28 | -6 | Не существует |
| 12 | 8 | 6 | 333357 | 19 | 28 | -3 | Не существует |
| 12 | 8 | 6 | 333366 | 18 | 28 | -2 | Не существует |
| 12 | 8 | 6 | 333447 | 18 | 28 | -2 | Не существует |
| 12 | 8 | 6 | 333456 | 16 | 28 | 0 | Не существует (по свойству б) |
| 12 | 8 | 6 | 333555 | 15 | 28 | 1 | Не существует (по свойству б) |
| 12 | 8 | 6 | 334446 | 15 | 28 | 1 | Не существует (по свойству б) |
| 12 | 8 | 6 | 334455 | 14 | 28 | 2 | 1 (33333333) |
| 12 | 8 | 6 | 344445 | 13 | 28 | 3 | Не существует (по свойству б) |
| 12 | 8 | 6 | 444444 | 12 | 28 | 4 | 1 (33333333) 4-призма (куб) |
| 12 | 7 | 7 | 3333336 | 9 | 21 | 0 | 1 (3333336) 6-пирамида |
| 12 | 7 | 7 | 3333345 | 7 | 21 | 2 | 1 (3333444) + 1 (3333345) |
| 12 | 7 | 7 | 3333444 | 6 | 21 | 3 | 4 (3333444) + 1 (3333345) |

Мною найдены 22 графа (с точностью до зевка – это все). Эскизы всех найденных мною графов я нарисовал (на бумаге). К сожалению, рисование каталога в электронном виде требует дополнительного времени, которым я пока не располагаю.

Пользуясь каталогом, легко проверить следующее:

**Утверждение.** Для всех графов с числом ребер меньше 13 каждая диагональ может быть так заменена ломаной из ребер, соединяющей вершины диагонали, что каждое из ребер графа входит не более чем в одну такую ломаную.

Проиллюстрирую на рисунке это утверждение для самого сложного случая – 4-призмы (случай сложный, во-первых, потому что у призмы наибольшее число диагоналей – 4, а во-вторых, каждая диагональ может быть заменена ломаной, состоящей не меньше, чем из 3 ребер).



Каждая диагональ обозначена своим цветом. Ребра, составляющие ломаную, соединяющую те же вершины, что и диагональ, указаны жирно тем же цветом.

Таким образом, поскольку каждая диагональ короче соответствующей ломаной, сумма длин диагоналей любого многогранника с числом ребер, меньше 13, всегда меньше суммы длин ребер.

Эстетическая оценка: 5 баллов.