**ММ250** (14 баллов) Решения принимаются до 29.11.2019

**Найти наименьшее возможное количество ребер выпуклого многогранника, у которого сумма длин ребер равна сумме длин диагоналей.**

Ответ: 13

Решение: Покажем, что существует многогранник с 13 ребрами, у которого суммы длин ребер и диагоналей равны.



Пусть у изображенного на рисунке жирными линиями многогранника (вид сверху) попарные расстояния между тремя вершинами в правой части рисунка и попарные расстояния между пятью вершинами в правой части рисунка пренебрежимо малы по сравнению с расстоянию между левой и правой частями рисунка. Тогда сумма ребер приблизительна равна длине трех ребер, соединяющих вершины из левой части рисунка с вершинами из правой части. Диагонали этого многоугольника выделены синим, их 4 штуки и все они соединяют вершины из левой части рисунка с вершинами из правой части рисунка. Значит, сумма длин диагоналей у такого многогранника больше суммы ребер.



Сдвинем теперь многогранник, сблизив левую и правую часть рисунка, получим многогранник, гомеоморфный исходному, примерно такой, как на втором рисунке. Будем считать, что вертикальные размеры рисунка много больше горизонтальных. Хорошо видно, что теперь сумма длин диагоналей меньше суммы длин сторон. Но поскольку при перетягивании вершин суммы длин диагоналей и ребер менялись непрерывно, в какой-то момент суммы длин диагоналей и ребер многогранника были равны.

Чтобы показать, что не существует многогранника с числом ребер, меньшим чем 12, проведем каталогизацию всех многогранников с числом ребер до 12 включительно с точностью до гомеоморфизма. Точнее, каждый многогранник представляет собой связный плоский (точнее, сферический) граф удовлетворяющий дополнительным свойствам:

а) все валентности вершин не меньше 3 и все валентности граней не меньше 3;

б) любые две грани либо не соприкасаются, либо соприкасаются в одной вершине, либо соприкасаются по одному ребру.

Мы проведем каталогизацию с точностью до гомеоморфизма и зеркальной симметрии всех таких графов с числом ребер, меньше 13. Верно ли обратное, что каждый такой граф реализуется в виде выпуклого многогранного тела, непросто сообразить, но, во всяком случае, все многогранники в наш каталог попадут.

Для составления каталога составим вспомогательную таблицу всех принципиально возможных количеств ребер, вершин и граней, а также наборов валентностей граней (удовлетворяющих условию а) для многогранников с количеством ребер до 12 включительно.

Количество ребер, вершин и граней сферического графа удовлетворяет равенству Эйлера: В-Р+Г=2. Суммы валентностей вершин и граней равны 2Р каждая, а поскольку все валентности не меньше 3, то $3В\leq 2Р$ и $3Г\leq 2Р$, откуда $\frac{Р}{3}+2\leq В, Г\leq \frac{2}{3}Р$. Например, отсюда следует, что, оказывается, вообще не существует многогранников с 7 ребрами (о, сколько нам открытий чудных готовит марафон Лецко!).

Отрезок, соединяющий любые две вершины, является либо ребром многогранника, либо диагональю какой-то одной грани многогранника, либо диагональю многогранника. В таблице для каждого возможного набора параметров графа {Р, В, Г, набор валентностей граней}, вычислены также: суммарное число диагоналей граней ДГ; общее число отрезков, соединяющих вершины $О= \frac{В(В-1)}{2}$; количество диагоналей графа $Д=О-Р-ДГ$. Если Д < 0, то указанный набор параметров не реализуется. Кроме того, некоторые наборы параметров не реализуются, потому что для них не выполняется указанное выше свойство б), этот факт указывается в последнем столбце таблицы.

Если граф с данным набором параметров существует, в последнем столбце таблицы указаны найденные мною количества графов с данным набором параметров, с указанием наборов валентностей вершин найденных графов. При этом учитывается, что у каждого сферического графа есть дуальный сферический граф, вершины которого лежат по одной на гранях исходного графа, и две вершины соединены ребром, если соответствующие грани исходного графа соприкасаются по ребру. Свойства а) и б) у графа и дуального графа удовлетворяются или не удовлетворяются одновременно. Количества и наборы валентностей граней и вершин у графа и дуального графа меняются местами. Поэтому, если не реализуется какой-то набор параметров {Р, В, Г, набор валентностей граней}, значит, не реализуется и соответствующий набор валентностей вершин для графа с числом граней В и числом вершин Г.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Р** | **В** | **Г** | **Вал. граней** | **ДГ** | **О** | **Д** | **Многогранники** |
| 6 | 4 | 4 | 3333 | 0 | 6 | 0 | 1 (3333) тетраэдр |
| 8 | 5 | 5 | 33334 | 2 | 10 | 0 | 1 (33334) 4-пирамида |
| 9 | 5 | 6 | 333333 | 0 | 10 | 1 | 1 (33444) 2 склеенных по грани тетраэдра |
| 9 | 6 | 5 | 33336 | 9 | 15 | -3 | Не существует |
| 9 | 6 | 5 | 33345 | 7 | 15 | -1 | Не существует |
| 9 | 6 | 5 | 33444 | 6 | 15 | 0 | 1 (333333) 3-призма |
| 10 | 6 | 6 | 333335 | 5 | 15 | 0 | 1 (333335) 5-пирамида |
| 10 | 6 | 6 | 333344 | 4 | 15 | 0 | 1 (333344) призма с «согнутой» 4-гранью |
| 11 | 6 | 7 | 3333334 | 2 | 15 | 2 | 1 (334444) + 1 (333445) тетраэдр + 4-пирамида, склеенные по 3-грани |
| 11 | 7 | 6 | 333337 | 14 | 21 | -4 | Не существует |
| 11 | 7 | 6 | 333346 | 11 | 21 | -1 | Не существует |
| 11 | 7 | 6 | 333355 | 10 | 21 | 0 | Не существует (по свойству б) |
| 11 | 7 | 6 | 333445 | 9 | 21 | 1 | 1 (3333334) 4-пирамида со срезанным у основания углом |
| 11 | 7 | 6 | 334444 | 8 | 21 | 2 | 1 (3333334) |
| 12 | 6 | 8 | 33333333 | 0 | 15 | 3 | 1 (334455) + 1 (444444) октаэдр |
| 12 | 8 | 6 | 333339 | 27 | 28 | -11 | Не существует |
| 12 | 8 | 6 | 333348 | 22 | 28 | -6 | Не существует |
| 12 | 8 | 6 | 333357 | 19 | 28 | -3 | Не существует |
| 12 | 8 | 6 | 333366 | 18 | 28 | -2 | Не существует |
| 12 | 8 | 6 | 333447 | 18 | 28 | -2 | Не существует |
| 12 | 8 | 6 | 333456 | 16 | 28 | 0 | Не существует (по свойству б) |
| 12 | 8 | 6 | 333555 | 15 | 28 | 1 | Не существует (по свойству б) |
| 12 | 8 | 6 | 334446 | 15 | 28 | 1 | Не существует (по свойству б) |
| 12 | 8 | 6 | 334455 | 14 | 28 | 2 | 1 (33333333) |
| 12 | 8 | 6 | 344445 | 13 | 28 | 3 | Не существует (по свойству б) |
| 12 | 8 | 6 | 444444 | 12 | 28 | 4 | 1 (33333333) 4-призма (куб) |
| 12 | 7 | 7 | 3333336 | 9 | 21 | 0 | 1 (3333336) 6-пирамида |
| 12 | 7 | 7 | 3333345 | 7 | 21 | 2 | 1 (3333444) + 1 (3333345) |
| 12 | 7 | 7 | 3333444 | 6 | 21 | 3 | 4 (3333444) + 1 (3333345) |

Мною найдены 22 графа (с точностью до зевка – это все). Эскизы всех найденных мною графов я нарисовал (на бумаге). К сожалению, рисование каталога в электронном виде требует дополнительного времени, которым я пока не располагаю.

Пользуясь каталогом, легко проверить следующее:

**Утверждение.** Для всех графов с числом ребер меньше 13 каждая диагональ может быть так заменена ломаной из ребер, соединяющей вершины диагонали, что каждое из ребер графа входит не более чем в одну такую ломаную.

Проиллюстрирую на рисунке это утверждение для самого сложного случая – 4-призмы (случай сложный, во-первых, потому что у призмы наибольшее число диагоналей – 4, а во-вторых, каждая диагональ может быть заменена ломаной, состоящей не меньше, чем из 3 ребер).



Каждая диагональ обозначена своим цветом. Ребра, составляющие ломаную, соединяющую те же вершины, что и диагональ, указаны жирно тем же цветом.

Таким образом, поскольку каждая диагональ короче соответствующей ломаной, сумма длин диагоналей любого многогранника с числом ребер, меньше 13, всегда меньше суммы длин ребер.