Разложим k и n на простые множители. Пусть $k = p_1^{a_1}\dots p_t^{a_t}$ и $n = p_1^{b_1}\dots p_t^{b_t}$(возможно какие-то из степеней нулевые). Тогда по формуле для числа делителей имеем $\frac{d(kn)}{d(n)} = \frac{(a_1+b_1+1)\dots((a_t+b_t+1)}{(b_1+1)\dots(b_t+1)}$. Нас интересует количество различных натуральных чисел, представимых в таком виде, причем набор a_i фиксирован, а набор b_i пробегает все возможные наборы. Если какое-то простое не входит в k, возникают сокращающиеся скобки, не влияющие на ответ. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что простые делители n – подмножество простых делителей k.
Я утверждаю, что ответ – $240 = 2^4\cdot 3\cdot 5$.
Докажем, что он подходит. Нас интересует количество чисел, представимых в виде $\frac{(x+4)(y+1)(z+1)}{xyz}$ при натуральных x, y, z. Очевидно
$\frac{(x+4)(y+1)(z+1)}{xyz} = (1+\frac{4}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) \le (1+4)(1+1)(1+1) = 20.$
Приведем сначала 13 значений.
При $x = 1, y = 1, z = 1$ получаем 20
При $x = 1, y = 1, z = 2$ получаем 15
При $x = 1, y = 1, z = 5$ получаем 12
При $x = 1, y = 1, z = 10$ получаем 11
При $x = 1, y = 2, z = 3$ получаем 10
При $x = 1, y = 2, z = 5$ получаем 9
При $x = 1, y = 3, z = 5$ получаем 8
При $x = 2, y = 1, z = 6$ получаем 7
При $x = 2, y = 3, z = 2$ получаем 6
При $x = 2, y = 3, z = 4$ получаем 5
При $x = 3, y = 2, z = 7$ получаем 4
При $x = 4, y = 3, z = 8$ получаем 3
При $x = 6, y = 15, z = 8$ получаем 2
Ясно, что $d(kn) > d(n)$, поэтому получить 1 нельзя. Остается объяснить, почему нельзя получить $13, 14, 16, 17, 18, 19$.
Если $x > 1$, то $(1+\frac{4}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) \le (1+\frac{4}{2})(1+1)(1+1) = 12$, поэтому $x = 1$. Значит $\frac{5(y+1)(z+1)}{yz}$ должно быть одним из перечисленных чисел. Поэтому одно из чисел y и z (пусть y) должно быть кратно 5 (иначе после сокращений получится число, кратное 5) и значит не меньше 5. Тогда $(1+\frac{4}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) \le 5\cdot(1+\frac{1}{5})(1+1) = 12$.
Теперь объясним, почему это наименьшее такое число. Очевидно для создания наименьшего числа с данным набором показателей следует возводить 2 в степень самого большого показателя, 3 в следующую по величине степень и так далее. Разберем теперь несколько случаев.
1) $k = 2^a$. Тогда нам нужны целые значения $\frac{a+x}{x} = 1+\frac{a}{x}$, поэтому a имеет не менее 13 делителей, откуда $a \ge 13$ и $k = 2^a \ge 2^{13} > 240$.
2) $k = 2^a 3^b$. Тогда нам нужны целые значения $(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{y}) \le (1+a)(1+b)$.
При $a = 1$ имеем $(1+a)(1+b) \le (1+1)(1+1) = 4 < 13$
При $a = 2$ имеем $(1+a)(1+b) \le (1+2)(1+2) = 9 < 13$
При $a = 3$ и $b < 3$ имеем $(1+a)(1+b) \le (1+3)(1+2) = 12 < 13$
При $a = b = 3$ имеем $(1+\frac{3}{x})(1+\frac{3}{y}) \le (1+3)(1+\frac{3}{2}) = 10$ кроме случая $x = y = 1$, поэтому представимы числа не превосходящие 10 и число 16 - итого не более 11 вариантов
При $a = 4$ и $b = 1$ имеем $(1+a)(1+b) = 10 < 13$
При $a = 4$ и $b = 2$ имеем $(1+\frac{4}{x})(1+\frac{2}{y}) \le \max((1+4)(1+\frac{2}{2}), (1+\frac{4}{2})(1+2)) = \max(10, 9) = 10$ кроме случая $x = y = 1$, поэтому представимы числа не превосходящие 10 и число 15 - итого не более 11 вариантов
При $a = 4$ и $b \ge 3$ имеем $k \ge 2^4\cdot 3^3 > 240$.
При $a = 5$ и $b = 1$ имеем $(1+a)(1+b) = 12 < 13$
При $a = 5$ и $b = 2$ имеем $(1+\frac{5}{x})(1+\frac{2}{y}) \le \max((1+5)(1+\frac{2}{2}), (1+\frac{5}{2})(1+2)) = \max(12, \frac{21}{2}) = 12$ кроме случая $x = y = 1$, поэтому представимы числа не превосходящие 12 и число 15 - итого не более 12 вариантов (не забываем, что число 1 непредставимо).
При $a = 5$ и $b \ge 3$ имеем $k \ge 2^5\cdot 3^3 > 240$.
При $a = 6$ и $b = 1$ имеем $(1+a)(1+b) = 14$, при этом 1 непредставимо. Докажем, что и 13 непредставимо, останется не более 12 вариантов. В самом деле, если $\frac{(x+6)(y+1)}{xy} = 13$, то $12xy = 6y + x + 6$, откуда $x \ge 6$ (поскольку кратно 6). Но тогда $12xy = 6xy + xy + 5xy > 6y + x + 30y > 6y + x + 6$.
При $a = 6$ и $b \ge 2$ имеем $k \ge 2^6\cdot 3^2 > 240$.
При $a \ge 7$ и $b \ge 1$ имеем $k \ge 2^7\cdot 3 > 240$.
3) k имеет минимум три простых делителя. Тогда k кратно 30. Переберем такие числа. Нам нужны целые значения $(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{y})(1+\frac{c}{z}) \le (1+a)(1+b)(1+c)$.
$k = 30 = 2\cdot 3\cdot 5$, $(1+a)(1+b)(1+c) = 8 < 13$
$k = 60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$, $(1+a)(1+b)(1+c) = 12 < 13$
$k = 90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$, запрещено, показатели не упорядочены.

$k=120=2^3\cdot 3\cdot 5$, $(1+\frac{3}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z})\le \max((1+\frac{3}{2})(1+1)(1+1),(1+3)(1+1)(1+\frac{1}{2}))=\max(10,12)=12$ кроме случая $x=y=z=1$, поэтому представлены числа, не превосходящие 12 и число 16 - не более 12 вариантов (не забываем, что число 1 непредставимо).
$k=150=2\cdot 3\cdot 5^2$, запрещено, показатели не упорядочены.
$k=180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$, $(1+\frac{2}{x})(1+\frac{2}{y})(1+\frac{1}{z})$. Если $x>1$ или $y>1$, то это выражение не превосходит $(1+\frac{2}{2})(1+2)(1+1)=12$. Если же $x=y=1$, то получаем $9+\frac{9}{z}$, что дает целые значения $10,12,18$. Поэтому представлены числа, не превосходящие 12 и число 18 - не более 12 вариантов (не забываем, что число 1 непредставимо).
$k=210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z})(1+\frac{1}{t})\le(1+\frac{1}{2})(1+1)(1+1)(1+1)=12$ за исключением случая $x=y=z=t=1$. Поэтому представлены числа, не превосходящие 12 и число 16 - не более 12 вариантов (не забываем, что число 1 непредставимо).
Поэтому никакие меньшие числа не годятся.
Обобщение. Докажем, что задача разрешима для любого числа, не только для 13. Пусть $k=2^{2^{a-1}}$, тогда $\frac{d(kn)}{d(n)}=\frac{x+2^{a-1}}{x}=1+\frac{2^{a-1}}{x}$. Поскольку у 2^{a-1} ровно a делителей, получаем ровно a различных целых значений данного выражения.