

217)

Сделаем аффинное преобразование, которое переведет вектора AB, AD, AA_1 в тройку ортов стандартной системы координат. При этом скрещивающиеся прямые останутся скрещивающимися, а пересекающиеся - пересекающимися. Введем теперь координаты.

$A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), A_1(0, 1, 0), D(0, 0, 1)$

Пусть, далее $D_1(0, b_1, c_2)$. Тогда плоскость D_1AB имеет уравнение $c_2y - b_1z = 0$ и поэтому точка C_1 имеет координаты (t, kb_1, kc_2) (она лежит в той же плоскости из-за пересечения прямых).

Пусть, далее, $C(a_2, 0, c_1), B_1(a_1, b_2, 0)$ (нули - потому что они лежат в гранях $DABC$ и AA_1B_1B , уравнения которых очевидны).

Запишем условие того, что DD_1C_1C - одна плоскость.

$$\left| \begin{pmatrix} a_2 & 0 & c_1 - 1 \\ 0 & b_1 & c_2 - 1 \\ t & kb_1 & kc_2 - 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} a_2 & 0 & c_1 - 1 \\ 0 & b_1 & c_2 - 1 \\ t & 0 & k - 1 \end{pmatrix} \right| = b_1 \left| \begin{pmatrix} a_2 & 0 & c_1 - 1 \\ 0 & 1 & c_2 - 1 \\ t & 0 & k - 1 \end{pmatrix} \right| = b_1(a_2(k - 1) - t(c_1 - 1)) = 0,$$

при этом $b_1 \neq 0$. Итак, $a_2(k - 1) = t(c_1 - 1)$

Аналогично, из $A_1B_1C_1D_1$ получаем, что $t(b_2 - 1) = a_1(k - 1)$

Запишем теперь условие, что DA_1B_1C - не лежат в одной плоскости (чтобы скрещивались диагонали DB_1 и A_1C). Получим $a_2(b_2 - 1) \neq a_1(c_1 - 1)$.

Однако это противоречит уравнению, получаемому перемножением двух предыдущих с сокращением на $t(k - 1)$.

Остается единственный шанс - либо $t = 0$ (невозможно, тогда C_1 лежит в грани AA_1D_1D) либо $k = 1$ (но тогда $c_1 = b_2 = 1$ и все равно $a_2(b_2 - 1) \neq a_1(c_1 - 1)$ наушается, там нули в обеих частях).

Итак, еще одна пара нескрещивающихся диагоналей точно есть.

Остальные, заметим, могут скрещиваться. Возьмем прямую призму, в основании которой - трапеция. Тогда две пары диагоналей соединяют концы параллельных отрезков, а остальные пары очевидно не лежат в одной плоскости.