219) Обозначим число вершин на i-ой грани многогранника за H_i. Тогда $R = \frac{\sum H_i}{2}$, $V = 2 - G + R = \frac{\sum H_i}{2} - 9$

Кроме того, как уже отмечалось, $V \leq \frac{2R}{3}$, откуда $\sum H_i \leq 54, R \leq 27, V \leq 18$

Вычислим теперь количество диагоналей. Можно взять все отрезки, соединяющие вершины, и вычесть из них ребра и диагонали в гранях. Получаем

$D = \frac{V(V-1)}{2} - \sum \frac{H_i(H_i-3)}{2} - \frac{\sum H_i}{2} = \frac{1}{2}(V^2 - V - \sum H_i^2 + 2\sum H_i) = \frac{1}{2}(V^2 - \sum H_i^2 + \frac{3}{2}\sum H_i + 9) = \frac{1}{2}(90 - \frac{15}{2}\sum H_i + (\sum H_i)^2 - \sum H_i^2)$

Заметим, что при фиксированной сумме чисел сумма их квадратов минимальна, когда они максимально сближены (для натуральных чисел, в частности, это означает, что они дают всего два значения). Кроме того, очевидно что $x^2 - \frac{15}{2}x = (x - \frac{15}{4})^2 + C$, поэтому возрастает при $x > \frac{15}{4}$, Более того, если $x \geq 10$, то при увеличении x на единицу $(x - \frac{15}{4})^2$ возрастает больше, чем возрастает сумма квадратов отдельных H_i при увеличении наименьшего из чисел на 1 (потому что оно не больше 4, так как их сумма не больше 54, а их всего 11). Следовательно, выгодно увеличить удвоенное число ребер по максимуму.

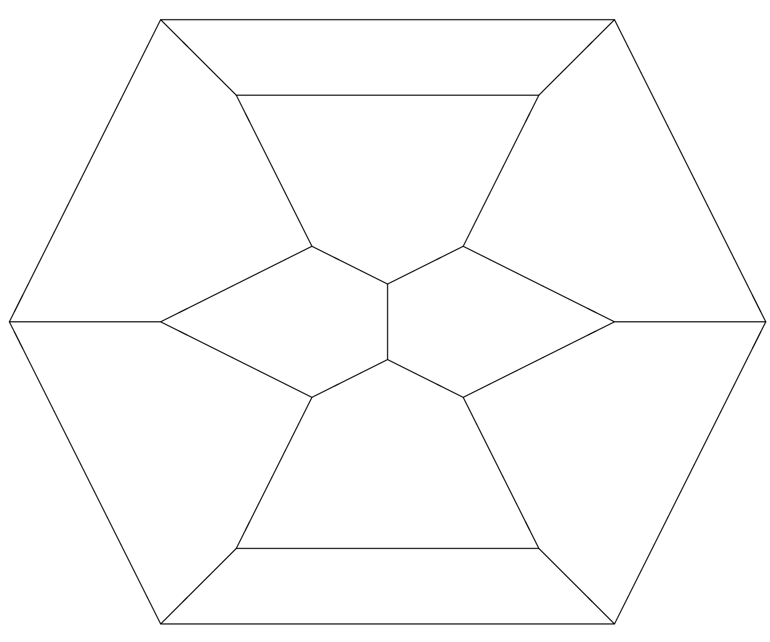
Итак, оптимальным был бы многогранник, у которого $V = 18, R = 27$, степени всех вершин равны 3, а грани - 10 пятиугольников и один четырехугольник. Для него мы имели бы $153 - 27 - 2 - 10 \cdot 5 = 74$ диагонали.

К сожалению, эта картинка невозможна. Рассмотрим четырехугольную грань. Из ее вершин исходят 4 ребра, начинающие образовывать пятиугольные грани. Каждую из них замыкает еще одна вершина с двумя ребрами, причем все эти вершины разные (иначе образуется вершина степени 4). Рассмотрим пространственный восьмизвенный контур, образованный этими 4 вершинами и 4 вершинами, соединенными с вершинами четырехугольника. Из четырех его вершин уже выходит по 3 ребра, из остальных - только по два (они начинают новые грани). Достроим там еще по одному ребру. Они должны продолжать эти грани. Для завершения граней будет не хватать по одному ребру и их придется дорисовать. В результате образуется еще одна четырехугольная грань и останутся две вершины. У всех уже построенных при этом будет степень 3, поэтому к ним ничего будет не подключить.

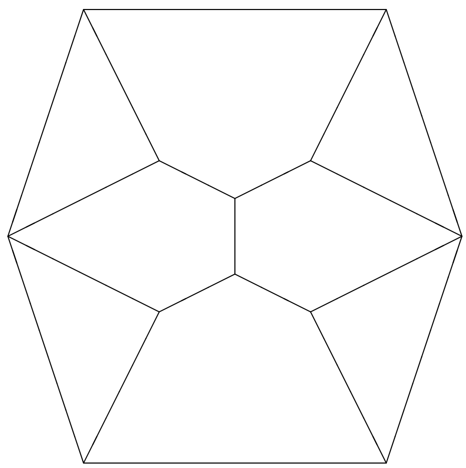
Если бы речь шла о графе, это не было бы проблемой - разбить четырехугольник на 2 пятиугольника легко. Но с многогранником так не выйдет - появятся вершины степеней 2 и 4.

Попробуем взять другие наборы граней. У любого другого многогранника есть грань минимум с 6 сторонами. Если их две, то сблизим число сторон у нее и одной из минимальных граней. Если же она одна, то оптимальный набор $4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6$. Он дал бы $153 - 27 - 2 \cdot 2 - 8 \cdot 5 - 9 = 73$ диагонали.

Со структурной точки зрения такой многогранник возможен. (см. рисунок) Опишем, как построить его в пространстве. Кажется, он может быть получен правильно подобранным сечением додекаэдра, но я не смогу это описать. Поэтому опишу по-другому.



Построим 12 его вершин, кроме внешнего контура как результат многократного усечения шестиугольной пирамиды (два противоположных ребра основания равны, остальные 4 тоже равны). Затем выберем ниже основания плоскость, параллельную ее основанию и продлим ее боковые грани (или их остатки) до пересечения с этой плоскостью. Затем выберем две противоположные грани (соответствующие паре равных ребер основания) и срежем их плоскостями, проходящими через ребро основания под наклоном чуть большим, чем боковые грани. Это достроит картинку до требуемой. Осталось построить внутреннюю картинку.



Пусть координаты вершин шестиугольника будут $(-2,4,0)$,$(2,4,0)$,$(3,0,0)$,$(2,-4,0)$,$(-2,-4,0)$, $(-3,0,0)$, координаты вершин прямоугольника $(\pm 1,\pm 2,2)$ и координаты центральных двух вершин $(0,\pm 1,3)$. Тогда верхний пятиугольник лежит в плоскости $y+z=4$, правый - в плоскости $x+z=3$. Эти плоскости пересекаются по прямой, пересекающей $z=0$ в точке $(3,4,0)$, откуда видна выпуклость верхнего пятиугольника. Выпуклость и плоскость остальных очевидна из симметрии, а треугольники - вегда выпуклые и плоские. Выпуклость самого тела тоже очевидна.