(В этом решении мы будет иногда рассматривать граф, а иногда многогранник - в зависимости от того, что будет выгоднее в данный момент. Иногда концепция будет меняться даже в пределах одной фразы)

Отметим сразу, что любой плоский вершинно-трехсвязный граф является графом некоторого выпуклого многогранника. Поэтому если в любом таком графе провести еще несколько ребер внутри его граней, то полученный граф также будет графом многогранника (трехсвязность явно не потеряется от добавления ребер).

Обозначим за V количество вершин многогранника. Очевидно, диагонали многогранника - отрезки, соединяющие его вершины, но при этом не ребра и не диагонали граней. Рассмотрим плоский граф и проведем в одной из его граней диагональ. При этом количество диагоналей соответствующего многогранника не могло уменьшиться, поскольку проведенное ребро и так не было диагональю, зато некоторые бывшие диагонали граней могли стать диагоналями многогранника (и даже стали, если не были уже соединены ребром. Очевидно, этого быть не могло, поскольку в многограннике это ребро проходило бы непонятно где). Продолжая эти действия, увеличиваем количество диагоналей до тех пор, пока все грани не станут треугольниками. Допустим их n. Тогда ребер $\frac{3n}{2}$, а вершин $\frac{n}{2}+2=V$, откуда $n=2V-4$. Количество диагоналей тогда равно $\frac{V(V-1)}{2}-R=\frac{V(V-1)}{2}-3V+6=\frac{(V-3)(V-4)}{2}=2016$ при $V=67$. Следовательно при $V\leq 66$ любой многогранник имеет менее 2016 диагоналей.

Рассмотрим 66-угольную пирамиду и триангулируем ее основание. Получим плоский граф, все грани которого - треугольники. Построив соответствующий многогранник, получим пример многогранника с 67 вершинами 2016 диагоналями. С меньшим числом вершин многогранников не бывает.

Рассмотрим теперь произвольный триангулированный граф. Выделим в нем замкнутый контур $x-$угольника и сотрем все диагонали у него внутри (их будет $x-3$) У полученной x-угольной грани будет ровно $\frac{x(x-3)}{2}$ диагонали, из которых $(x-3)$ - бывшие ребра (и все равно диагоналями не были) . Поэтому общее уменьшение числа пространственных диагоналей составит $\frac{(x-2)(x-3)}{2}$.

Отсюда получаем отличный способ строить многогранники с нужным числом диагоналей. Например, пусть $V=68$. Тогда $\frac{(V-3)(V-4)}{2}=2016+64$, поэтому если в полностью триангулированном графе стереть несколько диагоналей, организовав 11-угольную и 10-угольную грани, то уменьшение числа диагоналей составит $36+28=64$, поэтому пространственных диагоналей будет ровно столько, сколько надо. Следует, однако, объяснить, почему действительно существует многогранник с таким набором граней.

Лемма. Пусть даны числа $a_i\geq 2$, такие что $a_1+a_2+\ldots\leq V-1$. Тогда существует многогранник, некоторые грани которого - a_i+2-угольники, а остальные - треугольники, который имеет V вершин.

Доказательство. Пусть всего чисел N. Рассмотрим правильную высокую N-угольную пирамиду и сферу, содержащую ее основание. Плоскости ее боковых граней пересекают сферу по некоторым окружностям. Рассмотрим дуги этих окружностей, находящиеся в другой полуплоскости относительно основания, нежели вершина пирамиды. Отметим на каждой дуге по a_i-1 точке (можно считать, если выбирать их последовательно, что никакие три из них не лежат в одной плоскости). Рассмотрим их выпуклую оболочку - это часть шара. Выберем еще несколько точек на сфере, не лежащих в этой выпуклой оболочке, но по-прежнему с другой стороны от основания, нежели вершина пирамиды (и по-прежнему в общем положении в смысле плоскостей). Тогда выбранные точки вместе с вершинами исходной пирамиды образуют требуемый набор вершин многогранника. Для построения многогранника осталось только триангулировать оставшуюся часть сферы, взяв, например, выпуклую оболочку всех построенных вершин. Условие почти общего положения обеспечит треугольность всех остальных граней.

А теперь напишем программку, которая будет строить такие многогранники. Вот результаты ее работы - для каждого числа вершин указан набор чисел - количеств сторон граней, многогранник с которыми будет иметь нужное число вершин. Если упомянута 1 или 2 грани - мы просто добавляем 2 или 1 треугольник.

68 10 11
69 5 6 18
70 5 9 21
71 16 21
72 18 23
73 9 30
74 16 30
75 17 32
76 5 24 30
77 13 38
78 24 35

79 6 27 35
80 4 6 45
81 6 15 45
82 32 38
83 4 8 50
84 5 12 51
85 5 36 41
86 4 23 51
87 32 48
88 30 51
89 4 20 57
90 5 44 44
91 5 30 56
92 5 6 64
93 11 65
94 45 51
95 38 58
96 39 59
97 23 68
98 21 70
99 35 66
100 6 6 75
101 11 76
102 5 26 74
103 30 74
104 31 75
105 14 14 80
106 5 20 81
107 12 13 83
108 5 18 84
109 7 19 85
110 88
111 9 89
112 27 87
113 8 19 90
114 6 15 92
115 17 93
116 6 10 95
117 5 6 12 96
118 4 10 12 97
119 5 16 98
120 23 98
121 11 101
122 13 102
123 4 10 12 103
124 8 15 104
125 5 6 106
126 6 9 107
127 12 108
128 5 8 12 109
129 5 15 110
Первый многогранник, который не получилось пока что построить, имеет 130 вершин.
Попробуем увеличить класс многогранников, которые точно существуют.
Лемма. Пусть дан граф, в котором вершины A и B соединены ребром. Если ни одна из них не имеет степень 2, а после стягивания ребра граф становится трехсвязным, то он и был трехсвязным.
Доказательство. Удаление двух других вершин, кроме A и B, очевидно ничего не испортит. Если удалить их обе - это все равно, что из стянутого графа удалить одну. Если же удалить, например, вершину A и еще какую-то, то это почти во всем лучше, чем в стянутом графе удалить стянутую вершину и еще какую-то. Единственная проблема - если после этого удаления отвалится вершина B (в стянутом графе она удалилась вместе с A), но это запрещено условием про степень B

Теперь, например, можно вместо одной главной вершины взять две, соединенные ребром. Это увеличит минимальное число граней на 1 (теперь их надо минимум 4, причем две из них - не треугольники), но сделает еще одну вершину общей для двух граней. Граф, очевидно, по-прежнему трехсвязен, поскольку стягиванием ребра между главными вершинами его можно превратить в предыдущий граф. Повторяя эту операцию, можно получить граф такого вида - путь длиной $n+2$ ребра, из средних $n+1$ вершины которого торчит еще по одному ребру (картинка прилагается) и образуются тем самым заготовки для двух треугольников, двух четырехугольников и $n-1$ пятиугольника (или большего числа вершин, естественно).

```
  \__4___/
 3/      \
      5   \   5
           \______/
           /      \
               4   \  3
                    \
```

У него в "деревянной"части $2n+3$ вершины. Естественно, можно разветвить конец, добавляя треугольные грани до нужного количества вершин.

Теперь появляется новая идея для построения многогранников. Пусть, например, нужно 130 вершин. Возьмем картинку с путем длины 1, то есть вот такую

```
\____/
/    \
```

Если грани на этой картинке имеют a_1, a_2, a_3, a_4 вершин, то дополнительно к нарисованным шести надо добавить $a_1 - 3 + a_2 - 4 + a_3 - 3 + a_4 - 4$ вершины и получится $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 8$ вершин, что позволяет взять 4 грани с общим числом вершин 138. Старый метод позволял только 137. Оказывается, это критически важно (новый алгоритм вписан в программу):

130 3 9 15 111 с путем длины 1

Ну что же, поищем дальше.

130 3 9 15 111 с путем длины 1
131 4 6 113
132 5 9 114
133 20 114
134 21 115
135 5 6 14 117 с путем длины 1
136 4 16 118
137 4 5 17 119 с путем длины 1
138 4 4 6 121
139 5 9 122
140 4 5 11 123
141 4 13 124
142 6 14 125
143 3 7 15 126 с путем длины 1

На этом у пути длины 1 начались проблемы и сейчас я допишу пути длиной побольше... Хм, забавно, но даже с путем длины 3 пример для 144 не подбирается. Дальше снова идет несколько подряд чисел, для которых все в порядке

145 18 128
146 19 129
147 5 9 131
148 5 11 132
149 5 6 12 133 с путем длины 1
150 5 14 134
151 3 6 15 135 с путем длины 1

А потом уже часто программа ответов не находит.

Попробуем поисследовать возможные картинки чуть получше.

Как мы помним, если многогранник с V вершинами полностью триангулирован, то он имеет $2V-4$ грани. После этого можно стирать ребра и от образования a-угольника пропадают $\frac{(a-3)(a-2)}{2}$ диагонали. Всего же пропасть должны $\frac{(V-3)(V-4)}{2} - 2016 = \frac{(V+60)(V-67)}{2}$, что довольно много. При этом как бы мы не стирали ребра, должно выполняться условие $R \geq 1.5V$, поэтому стереть можно максимум $V+G-2-1.5V=1.5V-6$ ребер. Поскольку при стирании x ребер образуется $x+3$-угольник, сумма чисел a_i-3 (где a_i - число ребер i-ой грани) должна не превосходить $1.5V-6$. Всего исчезнет $\sum_i \frac{(a_i-3)(a_i-2)}{2}$ диагоналей. Поскольку функция $\frac{(a-3)(a-2)}{2}$ выпукла вверх, то больше диагоналей исчезнет, если числа a_i будут максимально раздвинуты. Будем сразу считать, что $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \ldots$ Заметим также, что $a_1+a_2+a_3 \leq V+6$, поскольку у трех граней может оказаться максимум 6 вершин, посчитанных лишний раз. Кроме того, $a_1+a_2 \leq V+2$ по аналогичной причине. При доказательстве следующего утверждения будет использовано только соображение про 2 грани, но при переборе вариантов пригодится и про 3.

Как видно из примеров, построенных программой, одна из граней многогранника должна иметь довольно много (в сравнении с общим числом) вершин. Попробуем доказать какие-нибудь строгие оценки.

Утверждение. Пусть даны числа $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \ldots \geq a_n \geq 3$, $V \geq 144$, $V \leq 500$. Пусть также $\sum_i \frac{(a_i-3)(a_i-2)}{2} = \frac{(V+60)(V-67)}{2}$ и $\sum_i (a_i-3) \leq 1.5V-6$. Тогда $a_1 \geq V-39$

Доказательство. Иногда мы будем обсуждать раздвигание чисел, в результате которого они могут стать нецелыми. Это не страшно.

Пусть для начала $a_1 \leq 0.5V+1$. Тогда раздвигая сначала a_1, потом a_2 и наконец a_3 при фиксированной сумме всех a_i до достижения ими значения $0.5V-1$, мы лишь увеличим $\sum_i \frac{(a_i-3)(a_i-2)}{2}$. Но после этого она будет не больше, чем $3 \cdot \frac{(0.5V-3)(0.5V-2)}{2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{(V-4)(V-6)}{2} < \frac{(V-3)(V-4)}{2} - 2016$ при $V \geq 144$. Итак, хотя бы одна грань имеет более $0.5V+1$ вершину.

Теперь пусть $a_1 = 0.5V+C, C < 0.25V$. Тогда раздвигая остальное (начав с a_2), можно добиться того, чтобы $a_2 = 0.5V-C+2 = a_3, a_4 = C+2$ (для получения нужной общей суммы. Отметим сразу, что $C+2 < 0.5V-C+2$).

Тогда имеем

$(0.5V+C-3)(0.5V+C-2)+2(0.5V-C+2-3)(0.5V-C+2-2)+C(C+1) \geq (V-3)(V-4)-2\cdot 2016$

$(0.5V+C-3)(0.5V+C-2)+2(0.5V-C-1)(0.5V-C)+C(C+1) \geq (V-3)(V-4)-2\cdot 2016$

$0.75V^2-CV+4C^2+2C+3.5V+4038 \geq V^2$

$0.25V^2+CV-3.5V-2C-4C^2-4038 \leq 0$

$0.25V(V-7)+C(V-2)-4038-4C^2 \leq 0$

$0.25 \cdot 144 \cdot 137 + 142C - 4038 - 4C^2 \leq 0$

$894+142C-4C^2 \leq 0$

$C \geq 40$

Рассмотрим теперь многогранник, у которого максимальная грань имеет более чем $0.5V+1$ вершину, но менее чем $V-39$. Раздвигая числа (начав с a_1, естественно, а потом мелкие - возможно нельзя раздвинуть a_1 и a_2, если $a_3=a_2$), получим какое-то число $a_1 = A < V-39$ и еще несколько чисел, равных $V+2-A$, одно число, не превосходящее $V+2-A$ и много чисел 3. Тогда имеем

$(A-3)(A-2)+(\frac{1.5V-3-A}{V-1-A}+1)(V+2-A-3)(V+2-A-2) \geq (V-3)(V-4)-4032$

$(A-3)(A-2)+(\frac{2.5V-4-2A}{V-1-A})(V-A-1)(V-A) \geq (V-3)(V-4)-4032$

$(A-3)(A-2)+(2.5V-4-2A)(V-A) \geq (V-3)(V-4)-4032$

$A^2-5A+6+(2.5V-4-2A)(V-A)-V^2+7V-12+4032 \geq 0$

$(2.5V-4-2A-V-A+5)(V-A)+2V+4038 \geq 0$

$2V+4038 \geq (V-A)(3A-1.5V-1)$

$5038 \geq (V-A)(3\cdot 40-1)$

$V-A \leq 39$

$A \geq V-39$

Что и требовалось доказать. Итак, все вершины многоугольника, кроме может быть 39 из них принадлежат одной грани. Причем с увеличением числа вершин оценка наверняка будет улучшаться.

Итак, у многогранника есть одна огромная грань ($V-C$ вершин, $C \leq 39$), а также $x_3, x_4, \ldots, x_{41}$ граней с $3, 4, \ldots 41$ вершиной. Тогда

Общее число граней равно $1+\sum_i x_i$

Общее число ребер равно $\frac{1}{2}(V-C+\sum_i ix_i)$

И (считая удвоенное для простоты число диагоналей) $(V-C-2)(V-C-3)+\sum_i x_i(i-3)(i-2) = (V-3)(V-4)-4032$

$\sum_i x_i(i-3)(i-2) = 2CV-2V-4026-C^2-5C \geq 0$

Формула Эйлера дает нам $2G+2V=2R+4$, $2+2\sum_i x_i+2V = V-C+\sum_i ix_i+4$, $V+C = 2+\sum_i(i-2)x_i$. Учитывая, что x_3 все равно не оказывает влияния на диагонали, получаем просто $V+C \geq 2+2x_4+3x_5+\ldots+39x_{41}$

Ну что же, теперь мы готовы к новым свершениям. Для каждого конкретного V можно построить все наборы чисел, удовлетворяющих этим условиям, для каждого из них попробовать понять, бывает ли такой многогранник и если нет - порадоваться. Вот и начнем с $V=144$.

Из условия $2CV-2V-4026-C^2-5C \geq 0$ находим $C \geq 17$. Тогда при $V=144$ имеем $\sum_i x_i(i-3)(i-2) = 208$ и один из первых найденных наборов таков - $x_{16}=1, x_4=13$. Получаем вопрос

- существует ли многогранник, у которого 144 вершины, одна грань - 127-угольник, другая - 16-угольник и еще 13 граней - четырехугольники (остальные - треугольники? Оказывается, да. Вот как можно его построить.
Рассмотрим правильную 14-угольную призму. Заменим два соответственных ребра в основаниях на дуги описанных окружностей и поставим на них 2 и 113 точек соответственно. 13 четырехугольных граней - боковые грани призмы, основания призмы превратятся в 127 и 16-угольники, остальное триангулируем и добавим одну вершину (нарастим одну из треугольных граней пирамидкой).
Это дает нам новый рецепт построения многогранников - взять такое C, чтобы $(V-C-2)(V-C-3) \approx (V-3)(V-4)-4032$, взять вторую грань так, чтобы для нее $(a_2-2)(a_2-3)$ почти добивало до нужного количество выкинутых диагоналей, и соединить их в нечто, похожее на призму. Если останутся лишние вершины - их можно либо вставить в триангуляцию, либо использовать для увеличения числа ребер у отдельных граней призмы (например, если продлить две плоскости граней призмы через одну и отметить точку на линии их пересечения, то вместо трех четырехугольных граней появятся две пятиугольные и две треугольные. Если же на ребре отметить две точки - то шестиугольные. Если проделать эту операцию с двух сторон от данной грани - можно превратить ее даже в семи- или восьмиугольник). Кроме того, изначальные две грани можно еще склеить между собой по вершине или ребру. Например по ребру это делается так - берем правильный многоугольник, проводим плоскость через одно его ребро, от которой он недалеко, симметричим относительно этой плоскости и соединяем соответствующие вершины. Далее одно из ребер заменяем на дугу окружности и все как раньше. Получается тело, похожее на призму, раздавленную с одного боку. Ближайшие к этому ребру грани - треугольники, а остальные - трапеции. Добавим в программу этот метод и посмотрим на результаты.
144 127 16 -и строить почти призму, 13 еще надо убрать, столько четырехугольников сделать можно
145 18 128
146 19 129
147 5 9 131
148 5 11 132
149 5 6 12 133 с путем длины 1
150 5 14 134
151 3 6 15 135 с путем длины 1
152 136 16 -и строить почти призму,8 еще надо убрать, столько четырехугольников сделать можно
153 137 17 -и строить почти призму,9 еще надо убрать, столько четырехугольников сделать можно
154 138 18 -и строить почти призму,9 еще надо убрать, столько четырехугольников сделать можно
155 4 6 140
156 9 141
157 4 6 10 142
158 9 10 143
159 144 13 -и строить почти призму,8 еще надо убрать, столько четырехугольников сделать можно
160 145 14 -и строить почти призму,11 еще надо убрать, столько четырехугольников сделать можно (у двух оснований одна вершина общая, поэтому будут 2 треугольника, 11 четырехугольников и останется лишнее ребро, с которым можно делать всякое).
161 16 146
162 17 147
163 148 17 -и строить почти призму,14 еще надо убрать, столько четырехугольников сделать можно (здесь общее одно ребро, но это все равно возможно - 2 треугольника, 13 четырехугольников и еще один четырехугольник можно обеспечить - соединив концы последней стороны 17-угольника с двумя соседними точками на дуге понятно какой окружности, а остальные точки дуги соединив с двумя концами этой стороны)
А вот 164 не удается сделать даже так.
Прежде чем придумывать новый способ для 164 (или применять старый для доказательства, что 164 невозможно - пока что мне именно так и кажется), Отметим и докажем еще несколько забавных фактов.
1) Как известно, у V-вершинного многогранника при нечетном V минимум $\frac{V-9}{2}$ диагоналей. Это дает хоть какую-то оценку сверху на требуемое V, теперь мы знаем, что 4039 вершин быть не может, поэтому $V \leq 4038$.
2) Похоже, что придуманный нами метод мог бы заменить предыдущие несколько и даже компьютерный перебор. Итак, пусть мы хотим построить V - вершинный многогранник, у которого N диагоналей. Выберем максимальное C для которого $(C-3)(C-2) \leq (V-3)(V-4)-2N$. Ясно, что $C < V$. Затем выберем максимальное T для которого $(T-3)(T-2) \leq (V-3)(V-4)-2N-(C-3)(C-2)$. Допустим, $C+T \leq V$ и $(V-3)(V-4)-2N-(C-3)(C-2)-(T-3)(T-2) \leq 2T$. Тогда можно построить почти призму (с C- и T- угольными основаниями) и порадоваться (четырехугольных

граней ей надо будет сделать $0.5((V-3)(V-4)-2N-(C-3)(C-2)-(T-3)(T-2)) \le T$, это возможно).
Оказывается, так будет довольно часто. Во-первых, поскольку T выбрано максимальным, $(V-3)(V-4)-2N-(C-3)(C-2)-(T-3)(T-2) < (T-2)(T-1)-(T-3)(T-2) = 2T-4$, так что условие про $2T$ выполнится само. По тем же причинам про выбор C имеем $(T-2)(T-3) \le 2(C-2)$, откуда $T \le 0.5(5+\sqrt{8C-15}) < 3+2\sqrt{2C}$ и поэтому если $C+3+2\sqrt{2C} < V$, то все условия будут выполнены.
Итак, будет достаточно чтобы $(\sqrt{C}+\sqrt{2})^2 < V$, то есть $\sqrt{C} \le \sqrt{V}-\sqrt{2}$, $C < V+2-2\sqrt{2V}$. Учитывая неравенство $(C-3)(C-2) \le (V-3)(V-4)-2N$, из которого следует $C \le 0.5(5+\sqrt{49+4V^2-28V-8N}) \le 3+\sqrt{V^2-6V-2N}$ (при $V>49$, что верно при нашем N и вообще при больших N), будет достаточно того, чтобы
$3+\sqrt{V^2-6V-2N} < V+2-2\sqrt{2V}$
$\sqrt{V^2-6V-2N} < V-1-2\sqrt{2V}$
$\sqrt{V^2-6V-2N} < V-7-2\sqrt{2V}$
$V^2-6V-2N < V^2+49+8V-14V+28\sqrt{2V}-4V\sqrt{2V}$
$-2N < 49+28\sqrt{2V}-4V\sqrt{2V}$
$2\sqrt{2}V\sqrt{V}-14\sqrt{V}-24.5 < N$
$2\sqrt{2}V\sqrt{V} < N$
То есть при $V \le 79$ все нормально и пример построен. Ясно, что наши оценки были довольно грубы при столь маленьком N, но при больших N видимо этим способом удастся построить многогранники у которых $V = O(N^{2/3})$, что является прикольным результатом, за который я надеюсь поиметь дополнительных баллов.
3) Улучшим неравенства про максимальную грань при $200 \ge V \ge 164$. Начало рассуждений сохраним, а потом заменим V.
$0.25V(V-7)+C(V-2)-4038-4C^2 \le 0$
$0.25 \cdot 164 \cdot 157 + 162C - 4038 - 4C^2 \le 0$
$2399+162C-4C^2 \le 0$
$C \ge 53$
Рассмотрим теперь многогранник, у которого максимальная грань имеет более чем $0.5V+1$ вершину, но менее чем $V-39$. Раздвигая числа (начав с a_1, естественно, а потом мелкие - возможно нельзя раздвинуть a_1 и a_2, если $a_3 = a_2$), получим какое-то число $a_1 = A < V-39$ и еще несколько чисел, равных $V+2-A$, одно число, не превосходящее $V+2-A$ и много чисел 3. Тогда имеем
$(A-3)(A-2)+(\frac{1.5V-3-A}{V-1-A}+1)(V+2-A-3)(V+2-A-2) \ge (V-3)(V-4)-4032$
$(A-3)(A-2)+(\frac{2.5V-4-2A}{V-1-A})(V-A-1)(V-A) \ge (V-3)(V-4)-4032$
$(A-3)(A-2)+(2.5V-4-2A)(V-A) \ge (V-3)(V-4)-4032$
$A^2-5A+6+(2.5V-4-2A)(V-A)-V^2+7V-12+4032 \ge 0$
$(2.5V-4-2A-V-A+5)(V-A)+2V+4038 \ge 0$
$2V+4038 \ge (V-A)(3A-1.5V-1)$
$4438 \ge (V-A)(3 \cdot 53 - 1)$
$V-A \le 28$
$A \ge V-28$
Как я и говорил, оценка улучшилась. Теперь можно использовать не более чем 30-угольные грани в дополнение к огромной, в которой все вершины, кроме, может быть, 28.
Рассмотрим самую большую грань, пусть в ней все вершины, кроме C, причем $C \le 28$. Изучим, со сколькими вершинами этой грани могут быть соединены прочие (назовем их внутренними) вершины.
Триангулируем все внутри большой грани. Пусть теперь проведено x ребер. Тогда всего у изображенного плоского графа $x+V-C$ ребер, V вершин и $1+\frac{1}{3}(2x+V-C)$ граней, откуда $V+1+\frac{1}{3}(2x+V-C) = x+V-C+2$, $x = V+2C-3$. Значит треугольников в разбиении $V+C-1$, а как бы мы не стирали ребра, граней (кроме большой) должно остаться минимум $V-C$, потому что все ребра большой грани входят в различные маленькие. То есть будет стерто максимум $2C-1$ ребро. Поскольку соорудить грань с более чем $C+2$ вершинами уже будет нельзя, максимум возможного - одна грань с $C+2$ вершинами и одна с $C+1$, как раз нужно стереть $2C-1$ ребро. Вряд ли эта картинка возможна, но даже для нее имеем следующую оценку на число диагоналей: изначально оно было не меньше $(V-C)C-(V+2C-3)$ (отрезок, соединяющий вершину гигантской грани с вершиной, не лежащей в ней и при этом не ребро - точно диагональ) и уменьшилось максимум на $\frac{C(C-1)+(C-1)(C-2)}{2} = (C-1)^2$. Значит $VC-C^2-V-2C+3-C^2+2C-1 \le 2014$
$VC-V-2C^2 \le 2012$
$V(C-1)-2C^2 \le 2012$
$164(C-1)-2C^2 \le 2012$

Учитывая $C \leq 28$ и решая это неравенство находим $C \leq 16$. Итак, $C \leq 16$, но при этом $(V - C - 2)(V - C - 3) \leq (V - 3)(V - 4) - 4032$. При $V = 164$ это дает только два варианта -
$V = 148, C = 16$ и нужно устранить еще 279 диагоналей либо $V = 149, C = 15$ и нужно устранить еще 133 диагонали.

Докажем, что первый случай невозможен. Допустим, такой многогранник построен. Его мелкие грани могут иметь максимум одно ребро с большой грани и еще максимум два ребра, один их концов которого - вершина большой грани. Тогда триангулируем все его мелкие грани, причем так, чтобы максимум один отрезок триангуляции выходил к контуру большой грани (соединим концы выходящих туда ребер, а на отрезанный четырехугольник надо одну диагональ). Тогда для триангуляции x-угольника нужно $x - 3$ ребра для его контура и $x - 4$ его диагонали, итого $2x - 7$ отрезков, соединяющих точки из множества C. Но у плоского графа с C вершинами может быть не более $6C - 12$ ребер (каждое ребро считаем два раза за то, что оно входит в две грани. Ниже тоже считаем так.). В нашем случае это 84. (про треугольники здесь не говорим, а то для них ответ отрицательный...)

Рассмотрим функцию $\frac{(x-3)(x-2)}{2(2x-7)}$. Она возрастает начиная с $x = 5$ и даже $f(3) < f(4) = f(5)$, поэтому она неубывает на всем отрезке от 3 до 18. Она показывает, сколько в среднем удаляется диагоналей за наличие в графе нужного числа ребер. Назовем ее эффективностью грани. Поскольку $\frac{279}{84} > f(14)$, у многоугольника обязана быть грань, в которой не менее 15 вершин. Пусть в максимальной грани (кроме огромной) T вершин, тогда в каждой из остальных - не более $22 - T$ (у двух граней вместе могут найтись две общие вершины и 4 вершины на контуре огромной грани, но остальные - разные из множества C). Разберем случаи

$T = 18$. Остальные грани - не более чем 4-угольники, которыми надо удалить $279 - 120 = 159$ диагоналей, граней надо минимум 159 штук, что невозможно - это даст минимум 159 отрезков между вершинами множества C, а их не более 84.

$T = 17$. Остальные грани - не более чем 5-угольники, которыми надо удалить $279 - 105 = 174$ диагоналей, поскольку для таких граней макимальная эффективность не больше 1, значит отрезков между вершинами множества C не менее 174 - много.

$T = 16$. Остальные грани - не более чем 6-угольники, которыми надо удалить $279 - 91 = 188$ диагоналей, поскольку для таких граней макимальная эффективность не больше $\frac{6}{5}$, значит отрезков между вершинами множества C не менее $188 \cdot \frac{5}{6}$ - много.

$T = 15$. Остальные грани - не более чем 7-угольники, которыми надо удалить $279 - 78 = 201$ диагоналей, поскольку для таких граней макимальная эффективность не больше $\frac{10}{7}$, значит отрезков между вершинами множества C не менее $188 \cdot \frac{7}{10}$ - много.

Итак, остался второй случай. $V = 149, C = 15$ и нужно устранить еще 133 диагонали. Это теоретически не очень много, но вроде бы тоже не выходит. Пусть в максимальной грани (кроме огромной) T вершин, тогда в каждой из остальных - не более $21 - T$. При этом $6C - 12 = 78$ Разберем случаи.

$T = 17$. Остальные грани - не более чем 4-угольники, которыми надо удалить $133 - 105 = 28$ диагоналей, четырехугольных граней граней надо минимум 28 штук, что невозможно - каждая из них должна иметь все вершины либо на контуре огромной грани, либо на новой максимальной, поэтому должна иметь их по две и там и там, то есть содержать одно из ребер новой максимальной, которых всего 17

$T = 16$. Остальные грани - не более чем 5-угольники, которыми надо удалить $133 - 91 = 42$ диагонали. Теоретически это пока что возможно - нужно, чтобы 16-угольная грань имела общее ребро с огромной (это дает неиспользуемую вершину) и чтобы было еще 14 пятиугольных граней, каждая из которых использует одно из ребер 16-угольной грани, одно из ребер с огромной грани и эту вершину. Но это на самом деле невозможно - у 16-угольной грани есть всего 13 подходящих ребер (общее с огромной сразу не подходит, а соседние с ним уже имеют общий конец с вершиной огромной грани, поэтому им понадобилось бы две новых вершины, которых просто нет). Ясно также, что 13 пятиугольных и 2 четырехугольных даст уменьшение числа диагоналей на 41, а это мало.

Дальше понадобятся чуть более точные оценочки. Сделаем их. Вспомним, как мы триангулировали грани и отметим, что $x - 4$ диагонали грани могут входить только в одну грань. Поэтому если мы считаем все отрезки дважды (с одной и с другой стороны), то обе копии одного такого отрезка следует присчитывать к рассматриваемой грани. Даже ту диагональ, которая отделяет внутренние вершины от контура огромной грани. Поэтому на самом деле грань с x сторонами требует $3x - 11$ отрезков (когда каждый отрезок считают с обеих сторон). Поэтому сумма именно таких выражений должна не превосходить 78. Треугольники, как и раньше, не рассматриваются. Хотя в них, заметим, отрезки тоже могут быть - как стороны. Новая эффективность мелких граней теперь будет определяться формулой $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{2(3x-11)}$. Эта функция тоже возрастает на $[5; 17]$, причем $f(4) = 1 > f(5) = 0.75$ и $\frac{133}{78} > f(11)$, поэтому должна быть грань, имеющая минимум 12 вершин. Продолжим теперь перебор.

$T = 15$. Остальные грани - не более чем 6-угольники, которыми надо удалить $133 - 78 = 55$ диаго-

налей, про этом на саму грань ушло минимум 34 полуотрезка, осталось их еще 44 и они могут быть использованы максимум с эффективностью $f(4) = 1$, поэтому их не хватит на 55 диагоналей.
$T = 14$. Остальные грани - не более чем 7-угольники, которыми надо удалить $133 - 66 = 67$ диагоналей, про этом на саму грань ушло минимум 31 полуотрезков, осталось их еще 47 и они могут быть использованы максимум с эффективностью $f(7) = 1$, поэтому их не хватит на 67 диагоналей.
$T = 13$. Остальные грани - не более чем 8-угольники, которыми надо удалить $133-55 = 78$ диагоналей, про этом на саму грань ушло минимум 28 полуотрезков, осталось их еще 50 и они могут быть использованы максимум с эффективностью $f(8) = \frac{15}{13}$, поэтому их не хватит на 78 диагоналей.
$T = 12$. Остальные грани - не более чем 9-угольники, которыми надо удалить $133-45 = 88$ диагоналей, про этом на саму грань ушло минимум 25 полуотрезков, осталось их еще 53 и они могут быть использованы максимум с эффективностью $f(9) = \frac{21}{16}$, поэтому их не хватит на 88 диагоналей.
Ура! Мы доказали, что 164 вершины не бывает. Поэтому ответ 163.
Заметим, что без такого вот ковыряния на тему "а можно ли построить многогранник с таким-то набором граней"в конце не обойтись. Я попросил свою программу выдать мне, для каких еще чисел до 200 она может построить нужный многогранник. И вот результаты - после 164 вовсе не все обрывается. Например, если разность между $(V-3)(V-4) - 4032$ и $C-2)(C-3)$ оказывается совсем маленькой, то подобрать нужный набор граней, наверное, получится.
Вот результаты работы программы. Заодно оказалось, что все числа до 163 тоже строятся этой призматической конструкцией, а я вначале извращался...
68 13 6 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
69 18 6 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
70 22 5 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
71 25 6 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
72 28 5 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
73 30 8 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
74 33 5 - и строить почти призму,1 четырехугольных граней еще надо сделать
75 35 7 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
76 37 8 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
77 39 8 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
78 41 8 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
79 43 7 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
80 45 6 - и строить почти призму,1 четырехугольных граней еще надо сделать
81 46 11 - и строить почти призму,5 четырехугольных граней еще надо сделать
82 48 10 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
83 50 8 - и строить почти призму,1 четырехугольных граней еще надо сделать
84 51 12 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
85 53 10 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
86 55 6 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
87 56 11 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
88 58 7 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
89 59 11 - и строить почти призму,7 четырехугольных граней еще надо сделать
90 61 7 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
91 62 11 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
92 64 6 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
93 65 10 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
94 66 13 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
95 68 9 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
96 69 12 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
97 71 6 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
98 72 10 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
99 73 13 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
100 75 7 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
101 76 10 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
102 77 13 - и строить почти призму,5 четырехугольных граней еще надо сделать
103 79 6 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
104 80 10 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
105 81 12 - и строить почти призму,9 четырехугольных граней еще надо сделать
106 82 14 - и строить почти призму,11 четырехугольных граней еще надо сделать
107 84 8 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
108 85 11 - и строить почти призму,5 четырехугольных граней еще надо сделать
109 86 13 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать

110 87 15 - и строить почти призму,7 четырехугольных граней еще надо сделать
111 89 8 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
112 90 11 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
113 91 13 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
114 92 15 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
115 94 7 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
116 95 10 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
117 96 12 - и строить почти призму,9 четырехугольных граней еще надо сделать
118 97 14 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
119 98 16 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
120 100 8 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
121 101 10 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
122 102 12 - и строить почти призму,10 четырехугольных граней еще надо сделать
123 103 14 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
124 104 16 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
125 106 6 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
126 107 9 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
127 108 11 - и строить почти призму,9 четырехугольных граней еще надо сделать
128 109 13 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
129 110 15 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
130 111 16 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
131 113 6 - и строить почти призму,1 четырехугольных граней еще надо сделать
132 114 9 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
133 115 11 - и строить почти призму,5 четырехугольных граней еще надо сделать
134 116 13 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
135 117 14 - и строить почти призму,9 четырехугольных граней еще надо сделать
136 118 16 - и строить почти призму,1 четырехугольных граней еще надо сделать
137 119 17 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
138 121 6 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
139 122 9 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
140 123 11 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
141 124 13 - и строить почти призму,1 четырехугольных граней еще надо сделать
142 125 14 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
143 126 15 - и строить почти призму,10 четырехугольных граней еще надо сделать
144 127 16 - и строить почти призму,13 четырехугольных граней еще надо сделать
145 128 17 - и строить почти призму,15 четырехугольных граней еще надо сделать
146 130 6 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
147 131 9 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
148 132 11 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
149 133 12 - и строить почти призму,9 четырехугольных граней еще надо сделать
150 134 14 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
151 135 15 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
152 136 16 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
153 137 17 - и строить почти призму,9 четырехугольных граней еще надо сделать
154 138 18 - и строить почти призму,9 четырехугольных граней еще надо сделать
155 140 6 - и строить почти призму,1 четырехугольных граней еще надо сделать
156 141 8 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
157 142 10 - и строить почти призму,7 четырехугольных граней еще надо сделать
158 143 12 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
159 144 13 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
160 145 14 - и строить почти призму,11 четырехугольных граней еще надо сделать
161 146 15 - и строить почти призму,13 четырехугольных граней еще надо сделать
162 147 16 - и строить почти призму,14 четырехугольных граней еще надо сделать
163 148 17 - и строить почти призму,14 четырехугольных граней еще надо сделать
164 не удалось
165 не удалось
166 152 7 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
167 153 9 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
168 154 11 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
169 155 12 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
170 156 13 - и строить почти призму,9 четырехугольных граней еще надо сделать

171 157 14 - и строить почти призму,11 четырехугольных граней еще надо сделать
172 158 15 - и строить почти призму,12 четырехугольных граней еще надо сделать
173 159 16 - и строить почти призму,12 четырехугольных граней еще надо сделать
174не удалось
175не удалось
176не удалось
177не удалось
178 165 5 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
179 166 8 - и строить почти призму,3 четырехугольных граней еще надо сделать
180 167 10 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
181 168 11 - и строить почти призму,6 четырехугольных граней еще надо сделать
182 169 12 - и строить почти призму,9 четырехугольных граней еще надо сделать
183 170 13 - и строить почти призму,11 четырехугольных граней еще надо сделать
184 171 14 - и строить почти призму,12 четырехугольных граней еще надо сделать
185 172 15 - и строить почти призму,12 четырехугольных граней еще надо сделать
186не удалось
187не удалось
188не удалось
189не удалось
190не удалось
191не удалось
192не удалось
193 181 6 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
194 182 8 - и строить почти призму,4 четырехугольных граней еще надо сделать
195 183 10 - и строить почти призму,2 четырехугольных граней еще надо сделать
196 184 11 - и строить почти призму,5 четырехугольных граней еще надо сделать
197 185 12 - и строить почти призму,7 четырехугольных граней еще надо сделать
198 186 13 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
199 187 14 - и строить почти призму,8 четырехугольных граней еще надо сделать
200не удалось