Ответ: $a \geq 0$, $a \neq n^2 + n + 1$, где $n \in N$.

По определению дробная часть числа $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Заменим x в исходном уравнении:
$(\lfloor x \rfloor + \{x\})^2 - a = \lfloor x \rfloor \{x\}$
$a = \lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor \{x\} + \{x\}^2$
Исследуем функцию $f(y) = n^2 + ny + y^2$ на полуинтервале $[n; n+1)$, где $n = \lfloor x \rfloor$, $y = \{x\}$, $0 \leq y < 1$.
1. При $n \geq 0$ функция $f(y)$ возрастающая, следовательно $n^2 \leq f(y) < n^2 + n + 1$.
2. При $n = -1$ функция $f(y) = 1 - y + y^2$ имеет точку минимума $y = \frac{1}{2}$, следовательно $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \leq f(y) \leq f(0) = 1$.
3. При $n < -1$ функция $f(y)$ убывающая, следовательно $n^2 - n + 1 < f(y) \leq n^2$, а после замены n на $n + 1$, $n^2 + n + 1 < f(y) \leq (n+1)^2$.
В итоге видно что:
1. $a \geq 0$, $a \neq n^2 + n + 1$.
2. Уравнение может иметь одно (наиболее общий случай), два (a — квадрат целого числа или $a = \frac{3}{4}$) и даже три решения (при $\frac{3}{4} < a < 1$).

Существует и другое определение дробной части числа (см., например, http://mathworld.wolfram.com/FractionalPart.html): $\{x\} = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, x \geq 0 \\ x - \lceil x \rceil, x < 0 \end{cases}$.
1. Случай для $x \geq 0$ рассмотрен выше.
2. Для $x < 0$ исходное уравнение после замены x:
$(\lceil x \rceil + \{x\})^2 - a = \lfloor x \rfloor \{x\}$
$a = \lceil x \rceil^2 + (2\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor)\{x\} + \{x\}^2$
Если $x = n$ — целое число, $\{x\} = 0$ и уравнение вырождается в $a = n^2$.
Иначе $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil - 1$ и уравнение принимает вид $a = \lceil x \rceil^2 + (\lceil x \rceil + 1)\{x\} + \{x\}^2$.
Рассмотрим функцию $f(y) = n^2 + (n+1)y + y^2$, где $n = \lceil x \rceil \leq 0$, $y = \{x\}$, $-1 < y \leq 0$.
2а. При $n = 0$ функция $f(y) = y + y^2$ имеет точку минимума $y = -\frac{1}{2}$, следовательно $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} \leq f(y) \leq f(0) = 0$.
2б. При $n < 0$ функция $f(y)$ убывающая, следовательно $n^2 - n < f(y) \leq n^2$, а после замены n на $n + 1$, $n^2 + n < f(y) \leq (n+1)^2$.
В итоге имеем: $a \geq -\frac{1}{4}$, но также $n^2 + n < a < n^2 + n + 1$, где $n \in N$.