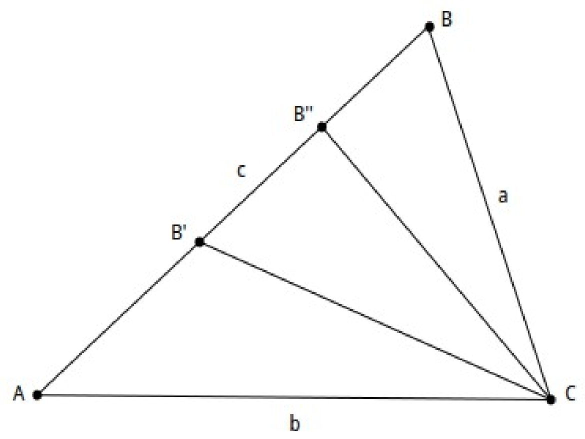
ММ224. *В задаче, которую задали на дом Пете и Васе, требовалось найти площади треугольников, на которые разбивается исходный треугольник ABC трисектрисами, проведёнными из вершины С. При сверке ответов у Пети и Васи совпали значения двух площадей: 2 и 4. Третья площадь у Пети оказалась равной 10, а у Васи — 20. Найти угол С, если известно, что один из учеников получил за домашнее задание пятёрку.*



Введём следующие обозначения: пусть угол C исходного треугольника равен 3γ, площади треугольников —

$$S_{AB'C}=S_1,\, S_{B'B''C}=S_2,\, S_{B''BC}=S_3.$$

Рассмотрим треугольник $AB'C$. Его площадь

$$S_{AB'C}=S_1=\frac{1}{2}\cdot b\cdot|AB'|\cdot\sin A$$

По теореме синусов

$$|AB'|=\frac{b\sin\gamma}{\sin B'}=\frac{b\sin\gamma}{\sin(180^o-A-\gamma)}=$$

$$=\frac{b}{\sin A\ \operatorname{ctg}\gamma+\cos A}$$

После подстановки получаем

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}A}$$

Аналогично найдём площади треугольников

$$S_{AB''C}=S_1+S_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{\operatorname{ctg}2\gamma+\operatorname{ctg}A},\quad S_{ABC}=S_1+S_2+S_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{\operatorname{ctg}3\gamma+\operatorname{ctg}A}$$

Далее потребуются формулы котангенсов кратных углов:

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\quad \operatorname{ctg}3\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$$

Пусть m — отношение площадей треугольников $AB''C$ и $AB'C$

$$m=\frac{S_1+S_2}{S_1}=\frac{\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}A}{\operatorname{ctg}2\gamma+\operatorname{ctg}A}$$

Из этого отношения, после преобразований получим выражение для $\operatorname{ctg}A$

$$\operatorname{ctg}A=\frac{(2-m)\operatorname{ctg}^2\gamma+m}{(2m-2)\operatorname{ctg}\gamma}$$

Пусть n — отношение площадей треугольников ABC и $AB'C$

$$n=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_1}=\frac{\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}A}{\operatorname{ctg}3\gamma+\operatorname{ctg}A}$$

Из этого отношения, после всех подстановок и преобразований получаем уравнение

$$(4n-mn-3m)\operatorname{ctg}^4\gamma+(4n-2mn-2m)\operatorname{ctg}^2\gamma+m-mn=0$$

Дискриминант уравнения $\Delta=16(n-m)^2$, корни уравнения

$$\operatorname{ctg}^2\gamma=\frac{-2n+mn+m\pm2(n-m)}{4n-mn-3m}$$

Так как в нашем случае $0<\gamma<\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{ctg}\gamma>\frac{\sqrt{3}}{3}$, окончательно остаётся единственный корень

$$\operatorname{ctg}\gamma=\sqrt{\frac{m(n-1)}{4n-mn-3m}}$$

Так как $1<m<n$, числитель подкоренного выражения всегда положителен, поэтому знаменатель тоже должен быть положительным. Зная $\operatorname{ctg}\gamma$ и $\operatorname{ctg}A$, из выражения для площади S_1 будем определять сторону b в качестве бонуса.

Теперь можно перейти к нахождению численного решения задачи. В условии не задано соответствие значений площадей конкретным треугольникам, поэтому, с учетом симметрии, необходимо рассмотреть три варианта.

1. $\boldsymbol{S_1=2, S_2=4, m=3}$

$S_3=10, n=8$, $4\cdot8-3\cdot8-3\cdot3=-1$, подкоренное выражение отрицательно, отбрасываем.

$S_3=20, n=13,\ \ 4\cdot 13-3\cdot 13-3\cdot 3=4$

$\operatorname{ctg}\gamma=3,\ \gamma=18.43^o,\ \boldsymbol{C=55.29^o},\ \operatorname{ctg}A=-\frac{1}{2},\ A=116.57^o,\ b=3.1623,$ сумма двух углов $<180^o$, оставляем (Вася прав!).

2. $\boldsymbol{S_1=4, S_2=2, m=\frac{3}{2}}$

$S_3=10, n=4,\ \ 4\cdot 4-\frac{3}{2}\cdot 4-3\cdot\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$

$\operatorname{ctg}\gamma=\frac{3}{\sqrt{11}},\ \gamma=47.87^o,\ \boldsymbol{C=143.61^o},\ \operatorname{ctg}A=\frac{7}{\sqrt{11}},\ A=25.35^o,\ b=4.9113,$ сумма двух углов $<180^o$, оставляем (И Петя прав?!).

$S_3=20, n=\frac{13}{2},\ \ 4\cdot\frac{13}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{13}{2}-3\cdot\frac{3}{2}=\frac{47}{4}$

$\operatorname{ctg}\gamma=\sqrt{\frac{33}{47}},\ \gamma=50.04^o,\ \boldsymbol{C=150.12^o},\ \operatorname{ctg}A=\frac{29}{11}\cdot\sqrt{\frac{33}{47}},\ A=24.36^o,\ b=4.9372,$ сумма двух углов $<180^o$, оставляем (Вася опять прав!).

3. $\boldsymbol{S_1=2, S_3=4}$

$S_2=10, m=6, n=8,\ \ 4\cdot 8-6\cdot 8-3\cdot 6=-34,$ подкоренное выражение отрицательно, отбрасываем.

$S_2=20, m=11, n=13,\ \ 4\cdot 13-11\cdot 13-3\cdot 11=-124,$ подкоренное выражение отрицательно, отбрасываем.