ММ225. *Найти все значения параметра a, при которых уравнение* $(2a+3)x^2+xa+3a-1=0$ *имеет два целых корня.*

1.

Воспользуемся свойствами корней приведённого квадратного уравнения. Сумма и произведение целых корней (x_1, x_2) есть целые числа, поэтому

$$x_1+x_2=-\frac{a}{2a+3}=b, \quad x_1x_2=\frac{3a-1}{2a+3}=c \qquad (1)$$

Из (1) выразим a через b и c, соответственно, и приравняем выражения для a друг к другу:

$$a=\frac{3b}{1-2b}=\frac{3c+1}{3-2c}$$

После преобразований получаем уравнение $11b=3c+1$, решением которого являются $b=3k+2,\ c=11k+7,$ где k – целое число. Подстановка любого из решений в соответствующее выражение для a даёт

$$a=-\frac{3k+2}{2k+1}$$

В выражении для дискриминанта уравнения из условия задачи

$$\Delta=a^2-4(2a+3)(3a-1)=-23a^2-28a+12$$

выполним подстановку для a и получим

$$\Delta=\frac{9k^2-32k-24}{(2k+1)^2}$$

Чтобы обеспечить целочисленность корней уравнения, дискриминант должен быть квадратом числа, поэтому решаем [1] диофантово уравнение $9k^2-32k-24=m^2$. Решения $k=15$ и $k=-5$ при подстановке в выражение для a дают окончательный ответ: $a=-\frac{47}{31}$ и $a=-\frac{13}{9}$.

Далее показаны ещё два способа решения. Следует уточнить, что эти решения соответствуют немного изменённому условию задачи: «Найти целочисленные решения (значения x) уравнения». Но из этих решений легко найти и значение параметра a.

2.

Из формул (1) выразим a через корни уравнения x_1 и x_2 и приравняем выражения друг к другу:

$$a=-\frac{3(x_1+x_2)}{2(x_1+x_2)+1}=\frac{3x_1x_2+1}{3-2x_1x_2} \qquad (2)$$

Заметим, что так как x_1 и x_2 целые числа, то а — рациональное. После преобразований получаем диофантово уравнение $3x_1x_2+11x_1+11x_2+1=0$. Решая его [1], получим корни уравнения из условия задачи: $x_1=-4, x_2=-43$ и $x_1=-3, x_2=16$.

3.

Сначала докажем, что уравнение не может иметь кратных корней. Предположим обратное, для этого дискриминант уравнения должен быть равен нулю

$$\Delta=a^2-4(2a+3)(3a-1)=-23a^2-28a+12=0$$

Это возможно при

$$a_{1,2}=\frac{28\pm\sqrt{28^2+4\cdot23\cdot12}}{-46}=\frac{14\pm2\sqrt{118}}{-23}$$

Но параметр a не может быть иррациональным числом, он должен быть рациональным (см. выше, формулы (2)).

Выразим из исходного уравнения параметр a через x

$$a=\frac{-3x^2+1}{2x^2+x+3}$$

При любом значении параметра a исходное уравнение имеет два корня (x_1, x_2), поэтому верно следующее равенство

$$a=\frac{-3x_1^2+1}{2x_1^2+x_1+3}=\frac{-3x_2^2+1}{2x_2^2+x_2+3}$$

После преобразований получаем $(x_2-x_1)(3x_1x_2+11x_1+11x_2+1)=0$. Так как $x_1 \neq x_2$, нулю равен второй множитель. Решая диофантово уравнение, получаем ответ (см. п.2).

Ссылки

1: https://www.alpertron.com.ar/quad.htm