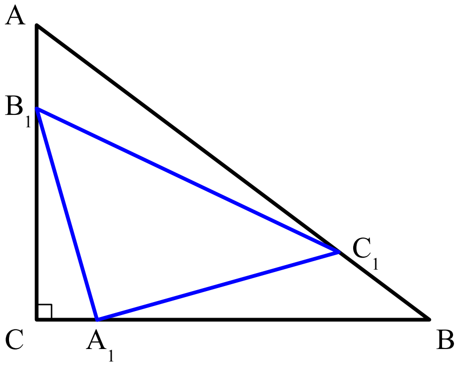
MM231. *На сторонах* AB, BC *и* AC *египетского треугольника* ABC *выбрали точки* C_1, A_1 *и* B_1 *соответственно. Оказалось, что треугольники* AB_1C_1, BC_1A_1 *и* CA_1B_1 *равновелики. Какую часть площади* ABC *составляет площадь треугольника* $A_1B_1C_1$ *при условии, что последний – прямоугольный?*



Сначала найдём общее решение для прямоугольного треугольника с катетами $|BC|=a$, $|AC|=s\,a$ и гипотенузой $|AB|=a\sqrt{1+s^2}$, где $0<s\leqslant 1$.

Точки A_1,B_1,C_1 делят стороны треугольника так, что

$|A_1C|=r_a|BC|=r_a a$, $|A_1B|=(1-r_a)|BC|=(1-r_a)a$;

$|AB_1|=r_b|AC|=r_b s\,a$, $|B_1C|=(1-r_b)|AC|=(1-r_b)s\,a$;

$|BC_1|=r_c|AB|$, $|AC_1|=(1-r_c)|AB|$, где $0<r_a,r_b,r_c<1$.

Тригонометрические функции углов:

$$\sin A=\cos B=\frac{|BC|}{|AB|}=\frac{a}{|AB|},\ \cos A=\sin B=\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{s\,a}{|AB|}.$$

Площади треугольников:

$$S_{AB_1C_1}=\frac{1}{2}|AB_1||AC_1|\sin A=\frac{1}{2}r_b s\,a\cdot(1-r_c)|AB|\cdot\frac{a}{|AB|}=\frac{1}{2}s\,a^2 r_b(1-r_c),$$

$$S_{BC_1A_1}=\frac{1}{2}|A_1B||BC_1|\sin B=\frac{1}{2}(1-r_a)a\cdot r_c|AB|\cdot\frac{s\,a}{|AB|}=\frac{1}{2}s\,a^2(1-r_a)r_c,$$

$$S_{CA_1B_1}=\frac{1}{2}|A_1C||B_1C|=\frac{1}{2}r_a a\cdot(1-r_b)s\,a=\frac{1}{2}s\,a^2 r_a(1-r_b).$$

По условию площади равны: $S_{AB_1C_1}=S_{BC_1A_1}\Rightarrow r_c=\dfrac{r_b}{1-r_a+r_b}$, $\quad S_{AB_1C_1}=S_{CA_1B_1}\Rightarrow r_c=\dfrac{r_b-r_a+r_a r_b}{r_b}$.

Приравнивая выражения для r_c, получаем $(r_b-r_a)(r_a r_b-r_a+1)=0$. Только первый множитель может быть равен нулю, второй всегда положителен. Следовательно $r_a=r_b=r_c=r$.

Найдём стороны $\triangle A_1B_1C_1$ используя теорему косинусов:

$$|B_1C_1|^2=|AB_1|^2+|AC_1|^2-2|AB_1||AC_1|\cos A=(r\,s\,a)^2+(1-r)^2(1+s^2)a^2-2r\,s\,a(1-r)|AB|\frac{s\,a}{|AB|}=$$
$$=a^2[(4s^2+1)r^2-(4s^2+2)r+s^2+1],$$

$$|A_1B_1|^2=|A_1C|^2+|B_1C|^2=r^2a^2+(1-r)^2s^2a^2=a^2[(s^2+1)r^2-2s^2r+s^2],$$

$$|A_1C_1|^2=|A_1B|^2+|BC_1|^2-2|A_1B||BC_1|\cos B=(1-r)^2a^2+r^2(1+s^2)a^2-2(1-r)a\,r|AB|\frac{a}{|AB|}=$$
$$=a^2[(s^2+4)r^2-4r+1].$$

Используя теорему Пифагора, определим, при каких значениях r $\triangle A_1B_1C_1$ будет прямоугольным:

$\angle C_1A_1B_1=90^\circ\Rightarrow|A_1B_1|^2+|A_1C_1|^2=|B_1C_1|^2\Rightarrow(2-s^2)r^2-(1-s^2)r=0$, решение: $r=\dfrac{1-s^2}{2-s^2}$, второй корень $(r=0)$ — вне области допустимых значений (ОДЗ);

$\angle A_1C_1B_1=90^\circ\Rightarrow|A_1C_1|^2+|B_1C_1|^2=|A_1B_1|^2\Rightarrow(2s^2+2)r^2-(s^2+3)r+1=0$, решения $\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{1+s^2}\right\}$;

$\angle A_1B_1C_1=90^\circ\Rightarrow|A_1B_1|^2+|B_1C_1|^2=|A_1C_1|^2\Rightarrow(2s^2-1)r^2-(3s^2-1)r+s^2=0$, решения $\left\{1,\dfrac{s^2}{2s^2-1}\right\}$ вне ОДЗ ($r<0$ при $0<s<1/\sqrt{2}$, $r\geqslant 1$ при $1/\sqrt{2}<s\leqslant 1$).

Отношение площадей треугольников

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}-3\cdot S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}}=1-\frac{\frac{3}{2}s\,a^2r(1-r)}{\frac{1}{2}s\,a^2}=1-3r(1-r)$$

и для $r\in\left\{\dfrac{1-s^2}{2-s^2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{1+s^2}\right\}$ оно равно $\dfrac{s^4-s^2+1}{(2-s^2)^2},\dfrac{1}{4},\dfrac{s^4-s^2+1}{(1+s^2)^2}$ соответственно.

Выводы:

- Для любого прямоугольного треугольника существует три положения точек A_1, B_1 и C_1, удовлетворяющих условию задачи. Исключением является равнобедренный прямоугольный треугольник $(s=1)$, для которого такое положение точек единственно $(r=1/2)$.
- $\triangle A_1 B_1 C_1$ подобен $\triangle ABC$, т. к. стороны треугольников пропорциональны:

r	$\lvert B_1 C_1\rvert$	$\lvert A_1 B_1\rvert$	$\lvert A_1 C_1\rvert$
$\dfrac{1-s^2}{2-s^2}$	$\dfrac{\sqrt{s^4-s^2+1}}{2-s^2}\cdot a\sqrt{1+s^2}$	$\dfrac{\sqrt{s^4-s^2+1}}{2-s^2}\cdot a$	$\dfrac{\sqrt{s^4-s^2+1}}{2-s^2}\cdot a\, s$
$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}\cdot a$	$\dfrac{1}{2}\cdot a\sqrt{1+s^2}$	$\dfrac{1}{2}\cdot a\, s$
$\dfrac{1}{1+s^2}$	$\dfrac{\sqrt{s^4-s^2+1}}{1+s^2}\cdot a\, s$	$\dfrac{\sqrt{s^4-s^2+1}}{1+s^2}\cdot a\sqrt{1+s^2}$	$\dfrac{\sqrt{s^4-s^2+1}}{1+s^2}\cdot a$

- Минимальное отношение площадей $\triangle A_1 B_1 C_1$ и $\triangle ABC$ равно $1/4$ и не зависит от отношения катетов $\triangle ABC$.
- Интересен случай $\triangle ABC$ с отношением катетов $s=1/\sqrt{2}$. В этом случае $r=1/3$ и $r=2/3$ и в обоих случаях отношение площадей $\triangle A_1 B_1 C_1$ и $\triangle ABC$ равно $1/3$.

Решение. По условию задачи $a=4$, $b=3 \Rightarrow s=\dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{S_{A_1 B_1 C_1}}{S_{ABC}} \in \left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{193}{625}, \dfrac{193}{529}\right\}$.