ММ232. *Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение* $x^3+y^3=z^3-i$ *для каждого* $i\in\{1,2,4\}$?

$\boldsymbol{i=1}$. Подставим в исходное уравнение $z=a+b, y=c+d$

$$x^3=z^3-y^3-1=(a+b)^3-(c+d)^3-1=(a^3-c^3)+(3a^2b-3c^2d)+(3ab^2-3cd^2)+(b^3-d^3-1) .$$

После замены $c=a, b=0$

$$x^3=-3a^2d-3ad^2-d^3-1 .$$

Пусть $x=g-1$, воспользуемся методом неопределённых коэффициентов и найдём решения системы уравнений

$$\begin{cases} g^3=-3a^2d \\ -3g^2=-3ad^2 \\ 3g=-d^3 \end{cases}$$

Значение $d=-\dfrac{g^3}{3a^2}$ из первого уравнения подставим во второе, получим $g^4=9a^3$. Тогда $g=9n^3, a=9n^4$, где n — натуральное число. Из третьего уравнения находим $d=-3n$. Следовательно исходное уравнение при $i=1$ имеет бесконечное множество решений

$$(x,y,z)=(9n^3-1,9n^4-3n,9n^4),(9n^4-3n,9n^3-1,9n^4) .$$

$\boldsymbol{i=2}$. Поступим как в предыдущем случае.

$$x^3=(a^3-c^3)+(3a^2b-3c^2d)+(3ab^2-3cd^2)+(b^3-d^3-2) .$$

После замены $b=1, d=-1$

$$x^3=(a^3-c^3)+(3a^2+3c^2)+(3a-3c) ,$$

после замены $c=a$

$$x^3=6a^2 .$$

Решения этого уравнения $x=6n^2, a=6n^3$, где n — натуральное число. Следовательно, исходное уравнение при $i=2$ имеет бесконечное множество решений

$$(x,y,z)=(6n^2,6n^3-1,6n^3+1),(6n^3-1,6n^2,6n^3+1) .$$

$\boldsymbol{i=4}$. Решений нет. Левая и правая части уравнения из условия задачи не сравнимы по модулю 9, т. к. для любого целого числа $a^3\equiv 0,\pm 1 \bmod 9$.