ММ238. *Вася написал на доске* k *последовательных чисел и нашёл их НОК —* V. *Петя написал* k *последовательных натуральных чисел, больших Васиных, и тоже нашёл их НОК —* P. *Оказалось, что* $2018 < \dfrac{V}{P} < 2019$. *При каком наименьшем* k *такое возможно?*

$\text{НОК}(2,3,4)=12$, $\text{НОК}(3,4,5)=60$. Оба равенства можно переписать как $\text{НОК}(2,3,4)=(2\cdot 3\cdot 4)/2$ и $\text{НОК}(3,4,5)=(3\cdot 4\cdot 5)/1$. В первом равенстве в знаменателе 2, т. к. два числа из трёх (2 и 4) имеют этот общий делитель, во втором случае в знаменателе 1, т. к. все три числа взаимно простые. Для последовательности из k натуральных чисел $m, m+1, \ldots, m+k-1$ наименьшее общее кратное

$$\text{НОК}(m, m+1, \ldots, m+k-1)=\frac{m(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+k-1)}{\text{D}(m,k)},$$

где $\text{D}(m,k)=p_1^{d_1} p_2^{d_2}\ldots$ — произведение общих простых делителей чисел последовательности (далее просто общие делители) и d_i — количество чисел последовательности кратных простому p_i.

Пусть q — остаток от деления m на простое число p. Если $q=0 \Rightarrow p|m$ и среди оставшихся $k-1$ чисел на p будут делится ещё $d=[(k-1)/p]$ чисел, если $q\neq 0 \Rightarrow p|(m+p-q)$ и среди оставшихся $k-(p-q+1)$ чисел на p будут делится ещё $d=[(k+q-1)/p]-1$ чисел. Из этого можно сделать несколько выводов: а) $p \leqslant k-1$, что довольно очевидно; б) если $p\nmid k$, максимальное значение $d_{max}=[(k-1)/p]$ при $q=0$, минимальное — $d_{min}=[k/p]-1$ при $q=1$, в) если $p|k$, $d=[(k-1)/p]=k/p-1$, т.е не зависит от q и, соответственно, от m. Аналогичные выводы справедливы для делителей высших степеней — $p^2, p^3, \ldots$.

Оценим пределы изменения $\text{D}(m,k)$ при фиксированном k. Максимальное значение достигается при $m=\text{НОК}(2,3,\ldots,k-1)\cdot n$, при этом остатки от деления m на все возможные общие делители равны нулю. Тогда для любого простого делителя $p \leqslant k-1$

$$d_{max}=\left[\frac{k-1}{p}\right]+\left[\frac{k-1}{p^2}\right]+\left[\frac{k-1}{p^3}\right]+\ldots,$$

причём слагаемые не зависят от того, кратно k или нет простому делителю p или его степени (см. выше выводы б) и в)). Но это выражение для показателя степени простого числа p в разложении $(k-1)!$, следовательно

$$\text{D}_{max}(m,k)=(k-1)! \quad \text{при} \quad m=\text{НОК}(2,3,\ldots,k-1)\cdot n.$$

Для минимального значения $\text{D}(m,n)$ необходимо наоборот, чтобы остатки от деления m на все возможные общие делители были не равны нулю, это будет, например, при $m=\text{НОК}(2,3,\ldots,k-1)\cdot n+1$. Тогда для простых делителей $p\nmid k$ (см. выше вывод б))

$$d_{min}=\left[\frac{k}{p}\right]-1+\left[\frac{k}{p^2}\right]-1+\ldots+\left[\frac{k}{p^t}\right]-1,$$

где t удовлетворяет неравенству $p^t \leqslant k < p^{t+1}$. Для простых делителей $p|k$ выражение для d_{min} аналогично, за исключением того, что для нескольких первых слагаемых отсутствует выделение целой части (см. выше вывод в)), например, если $p|k$ и $p^2|k$, но $p^3\nmid k, \ldots$. Выражение для d_{min} опять напоминает выражение для показателя степени простого числа p в разложении $k!$, с той разницей, что этот показатель уменьшается на некоторое число, а именно показатель t наивысшей степени $p^t \leqslant k$, эти степени можно определить из $\text{НОК}(2,3,\ldots,k)$. Следовательно

$$\text{D}_{min}(m,k)=\frac{k!}{\text{НОК}(2,3,\ldots,k)} \quad \text{при} \quad m=\text{НОК}(2,3,\ldots,k-1)\cdot n+1.$$

Теперь перейдём непосредственно к решению задачи. Пусть Вася написал числа $m_v, m_v+1, \ldots, m_v+k-1$, а Петя — $m_p, m_p+1, \ldots, m_p+k-1$, $m_p > m_v+k-1$. Тогда

$$\frac{V}{P}=\frac{\text{НОК}(m_v, m_v+1, \ldots, m_v+k-1)}{\text{НОК}(m_p, m_p+1, \ldots, m_p+k-1)}=\frac{m_v(m_v+1)\cdot\ldots\cdot(m_v+k-1)}{m_p(m_p+1)\cdot\ldots\cdot(m_p+k-1)}\cdot\frac{\text{D}(m_p,k)}{\text{D}(m_v,k)}.$$

При близости значений m_v и m_p, первый множитель в пределе стремится к единице, а результат зависит от отношения величин $\text{D}(m,k)$. Максимальное значение этого отношения будет, например, при $m_p=\text{НОК}(2,3,\ldots,k-1)\cdot n$ и $m_v=\text{НОК}(2,3,\ldots,k-1)\cdot n-k-1$. Тогда

$$\frac{V}{P} < \frac{\mathrm{D}_{max}(m_p, k)}{\mathrm{D}_{min}(m_v, k)} = \frac{(k-1)! \cdot \text{НОК}(2, 3, \ldots, k)}{k!} = \frac{\text{НОК}(2, 3, \ldots, k)}{k}$$ (OEIS A002944).

Первые члены этой последовательности: 1, 1, 2, 3, 12, 10, 60, 105, 280, 252, 2520, … . Следовательно, ответ на задачу: $k=11$, пример этого: $m_v=24697, m_p=25200$.

Примечание.
В формуле для начального числа последовательности из k чисел $m=\text{НОК}(2,3,\ldots,k-1)\cdot n$ вместо множителя $\text{НОК}(\ldots)$ можно использовать числа последовательности OEIS A067391:

```
PARI: a(n)=lcm(setminus(vector(n-1,i,i),divisors(n)))
```