***Задача 231 (5 баллов)***

***Ответ***: Отношение площади треугольника $A\_{1}B\_{1}C\_{1}$ к площади треугольника $ABC$ может принимать одно из значений $\frac{1}{4},\frac{193}{625}, \frac{193}{529}.$

Для произвольного прямоугольного треугольника найдены все значения, которые может принимать отношение площади треугольника $A\_{1}B\_{1}C\_{1}$ к площади треугольника $ABC.$

***Решение:*** Пусть треугольник $ABC$ произвольный, и для него $\frac{CA\_{1}}{CB}=α,\frac{AB\_{1}}{AC}=β,\frac{BC\_{1}}{BA}=γ.$ Тогда $\frac{S\_{AB\_{1}C\_{1}}}{S\_{ABC}}=\frac{AB\_{1}∙AC\_{1}∙sin∠BAC}{AB∙AC∙sin∠BAC}=\frac{AB\_{1}}{AC}∙\frac{AC\_{1}}{AB}=β\left(1-γ\right),$ и аналогично $\frac{S\_{BA\_{1}C\_{1}}}{S\_{ABC}}=γ\left(1-α\right), \frac{S\_{CA\_{1}B\_{1}}}{S\_{ABC}}=α\left(1-β\right)$. Поэтому из условия $S\_{AB\_{1}C\_{1}}=S\_{BA\_{1}C\_{1}}=S\_{CA\_{1}B\_{1}}$ следует $β\left(1-γ\right)=γ\left(1-α\right)=α\left(1-β\right)$, а также

$β-γ=γ\left(β-α\right),$(1)

$γ-α=α\left(γ-β\right),$(2)

$α-β=β\left(α-γ\right).$(3)

Если $α\geq β$, то из (3) следует, что $α\geq γ$, далее из (2) следует, что $β\geq γ$, а затем из (1) следует, что $β\geq α.$ Значит, $α=β=γ$.

Если $α\leq β$, то из (3) следует, что $α\leq γ$, далее из (2) следует, что $β\leq γ$, а затем из (1) следует, что $β\leq α.$ Значит, $α=β=γ$.

Тогда

$$\frac{S\_{AB\_{1}C\_{1}}}{S\_{ABC}}=\frac{S\_{BA\_{1}C\_{1}}}{S\_{ABC}}=\frac{S\_{CA\_{1}B\_{1}}}{S\_{ABC}}=α\left(1-α\right),$$

и $\frac{S\_{A\_{1}B\_{1}C\_{1}}}{S\_{ABC}}=\frac{S\_{ABC}-S\_{AB\_{1}C\_{1}}-S\_{BA\_{1}C\_{1}}-S\_{CA\_{1}B\_{1}}}{S\_{ABC}}=1-3α\left(1-α\right).$

В нашем случае треугольник египетский. Поскольку речь идёт об отношении площадей треугольников $A\_{1}B\_{1}C\_{1}$ и $ABC$, то достаточно рассмотреть случай, когда стороны треугольника равны 3,4,5. Пусть $AB=3,BC=4,AC=5$.

И, как было показано, должно выполняться условие $\frac{CA\_{1}}{CB}=\frac{AB\_{1}}{AC}=\frac{BC\_{1}}{BA}$. Пусть $\frac{CA\_{1}}{CB}=\frac{AB\_{1}}{AC}=\frac{BC\_{1}}{BA}=α$. Понятно, что $α\in (0,1)$ , так как в случаях $α=0,1$ точки $A\_{1},B\_{1},C\_{1}$ совпадают с вершинами треугольника $ABC$, и треугольники $AB\_{1}C\_{1}, BA\_{1}C\_{1}, CA\_{1}B\_{1}$ не образуются (или можно считать их вырожденными).

Из треугольников $AB\_{1}C\_{1}, BA\_{1}C\_{1}, CA\_{1}B\_{1}$ определяем квадраты сторон $B\_{1}C\_{1},A\_{1}C\_{1},A\_{1}B\_{1}$, воспользовавшись теоремой косинусов (во втором случае можно и теоремой Пифагора):

$$B\_{1}C\_{1}^{2}=B\_{1}A^{2}+C\_{1}A^{2}-2∙B\_{1}A∙C\_{1}A∙cos∠A=\left(5α\right)^{2}+\left(3-3α\right)^{2}-2\left(5α\right)\left(3-3α\right)\frac{3}{5}=52α^{2}-36α+9,$$

$$A\_{1}C\_{1}^{2}=C\_{1}B^{2}+A\_{1}B^{2}=\left(3α\right)^{2}+\left(4-4α\right)^{2}=25α^{2}-32α+16,$$

$B\_{1}A\_{1}^{2}=B\_{1}C^{2}+A\_{1}C^{2}-2∙B\_{1}C∙A\_{1}C∙cos∠C=\left(5-5α\right)^{2}+\left(4α\right)^{2}-2\left(5-5α\right)\left(4α\right)\frac{4}{5}=73α^{2}-82α+25$.

1. Угол при вершине $B\_{1}$ прямой, тогда по теореме косинусов $A\_{1}C\_{1}^{2}=B\_{1}C\_{1}^{2}+B\_{1}A\_{1}^{2}$. Подставляем и получаем

 $25α^{2}-32α+16=52α^{2}-36α+9+73α^{2}-82α+25,$

$$50α^{2}-43α+9=0$$

$$α=\frac{1}{2},\frac{9}{25}.$$

В случае $α=\frac{1}{2}$

$\frac{S\_{A\_{1}B\_{1}C\_{1}}}{S\_{ABC}}=1-3α\left(1-α\right)=\frac{1}{4}$.



В случае $α=\frac{9}{25}$

$\frac{S\_{A\_{1}B\_{1}C\_{1}}}{S\_{ABC}}=1-3α\left(1-α\right)=\frac{193}{625}$.



1. Угол при вершине $C\_{1}$ прямой, тогда по теореме косинусов $A\_{1}B\_{1}^{2}=A\_{1}C\_{1}^{2}+B\_{1}C\_{1}^{2}$. Подставляем и получаем

 $73α^{2}-82α+25=25α^{2}-32α+16+52α^{2}-36α+9,$

$$2α^{2}+7α=0$$

$$α=0,-\frac{7}{2} $$

В этом случае найденные значения не удовлетворяют условию $α\in (0,1)$, и, значит, угол при вершине $C\_{1}$ не может быть прямым.

1. Угол при вершине $A\_{1}$ прямой, тогда по теореме косинусов $B\_{1}C\_{1}^{2}=A\_{1}C\_{1}^{2}+B\_{1}A\_{1}^{2}$. Подставляем и получаем

 $52α^{2}-36α+9=25α^{2}-32α+16+73α^{2}-82α+25,$

$$23α^{2}-39α+16=0$$

$$α=1,\frac{16}{23}.$$

Условию $α\in (0,1)$ первое значение не удовлетворяет, а в случае $α=\frac{16}{23}$

$\frac{ S\_{A\_{1}B\_{1}C\_{1}}}{S\_{ABC}}=1-3α\left(1-α\right)=\frac{193}{529}$.



Рассмотрим общий случай. Пусть задан прямоугольный треугольник $ABC$ с прямым углом при вершине B и единичной гипотенузой. Без ограничения общности можно считать, что $BC\geq AB$. Обозначим угол при вершине С через k.

Тогда формулы для квадратов сторон треугольника $A\_{1}B\_{1}C\_{1}$ будут иметь вид

$$B\_{1}C\_{1}^{2}=(1+3(sink)^{2})α^{2}-4(sink)^{2}α+(sink)^{2},$$

$$A\_{1}C\_{1}^{2}=α^{2}-2(cosk)^{2}α+(cosk)^{2},$$

$B\_{1}A\_{1}^{2}=(1+3(cosk)^{2})α^{2}-2(1+(cosk)^{2})α+1$.

1. Угол при вершине $B\_{1}$ прямой, тогда по теореме косинусов $A\_{1}C\_{1}^{2}=B\_{1}C\_{1}^{2}+B\_{1}A\_{1}^{2}$. Подставляем и получаем два значения (в случае $BC=AB$ эти значения совпадают)

$$α=\frac{1}{2},(sink)^{2}.$$

В случае $α=\frac{1}{2}$

$\frac{S\_{A\_{1}B\_{1}C\_{1}}}{S\_{ABC}}=1-3α\left(1-α\right)=\frac{1}{4}$.

В случае $α=$ $(sink)^{2}$

$\frac{S\_{A\_{1}B\_{1}C\_{1}}}{S\_{ABC}}=1-3α\left(1-α\right)=1-3(sink)^{2}(cosk)^{2}$.

1. Угол при вершине $C\_{1}$ прямой, тогда по теореме косинусов $A\_{1}C\_{1}^{2}=B\_{1}C\_{1}^{2}+B\_{1}A\_{1}^{2}$. Подставляем и получаем два значения

$$α=0,\frac{2(sink)^{2}-1}{3(sink)^{2}-1}.$$

В нашем случае $(sink)^{2}<\frac{1}{2}$, поэтому оба значения не принадлежат интервалу (0,1), угол при вершине $C\_{1}$ не может быть прямым.

1. Угол при вершине $A\_{1}$ прямой, тогда по теореме косинусов $B\_{1}C\_{1}^{2}=A\_{1}C\_{1}^{2}+B\_{1}A\_{1}^{2}$. Подставляем и получаем два значения (в случае $BC=AB$ эти значения совпадают)

$$α=1,\frac{(cosk)^{2}}{3(cosk)^{2}-1}.$$

Условию $α\in (0,1)$ первое значение не удовлетворяет, а для неравнобедренного треугольника ABC в случае $α=\frac{(cosk)^{2}}{3(cosk)^{2}-1}$

$\frac{ S\_{A\_{1}B\_{1}C\_{1}}}{S\_{ABC}}=1-3α\left(1-α\right)=\frac{3(cosk)^{4}-3\left(cosk\right)^{2}+1}{(3\left(cosk\right)^{2}-1)^{2}}$.

**Таким образом, для неравнобедренного прямоугольного треугольника ABC существует три положения треугольника** $A\_{1}B\_{1}C\_{1} $**с отношением площадей**

$$\frac{1}{4},1-3\left(sink\right)^{2}\left(cosk\right)^{2}, \frac{3\left(cosk\right)^{4}-3\left(cosk\right)^{2}+1}{\left(3\left(cosk\right)^{2}-1\right)^{2}}.$$

**А для равнобедренного прямоугольного треугольника ABC существует лишь одно положение треугольника** $A\_{1}B\_{1}C\_{1}$**с отношением площадей** $\frac{1}{4}.$