***Задача 231 (5 баллов)***

***Ответ***: Отношение площади треугольника к площади треугольника может принимать одно из значений

Для произвольного прямоугольного треугольника найдены все значения, которые может принимать отношение площади треугольника к площади треугольника

***Решение:*** Пусть треугольник произвольный, и для него Тогда и аналогично . Поэтому из условия следует , а также

(1)

(2)

(3)

Если , то из (3) следует, что , далее из (2) следует, что , а затем из (1) следует, что Значит, .

Если , то из (3) следует, что , далее из (2) следует, что , а затем из (1) следует, что Значит, .

Тогда

и

В нашем случае треугольник египетский. Поскольку речь идёт об отношении площадей треугольников и , то достаточно рассмотреть случай, когда стороны треугольника равны 3,4,5. Пусть .

И, как было показано, должно выполняться условие . Пусть . Понятно, что , так как в случаях точки совпадают с вершинами треугольника , и треугольники не образуются (или можно считать их вырожденными).

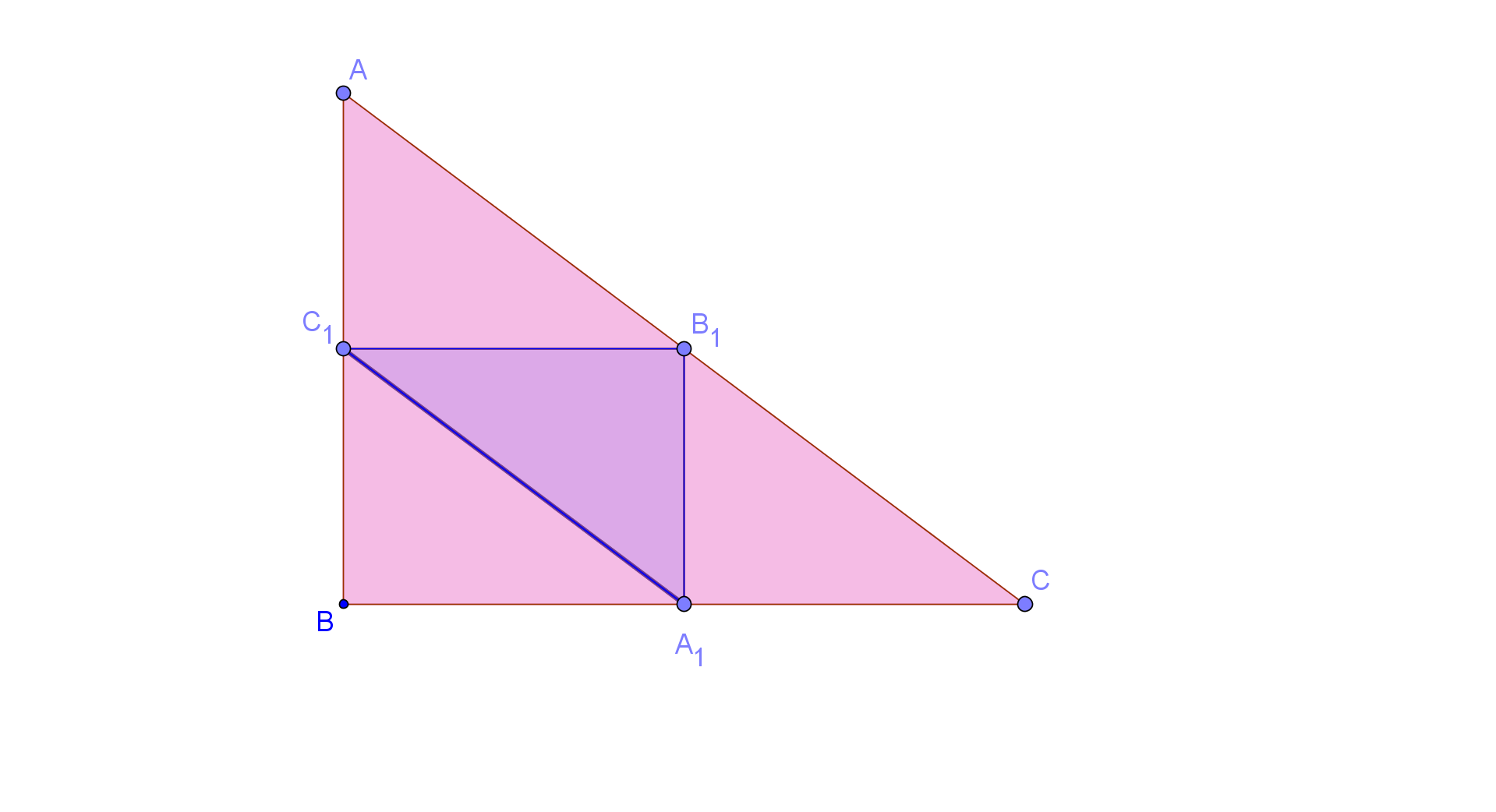
Из треугольников определяем квадраты сторон , воспользовавшись теоремой косинусов (во втором случае можно и теоремой Пифагора):

.

1. Угол при вершине прямой, тогда по теореме косинусов . Подставляем и получаем

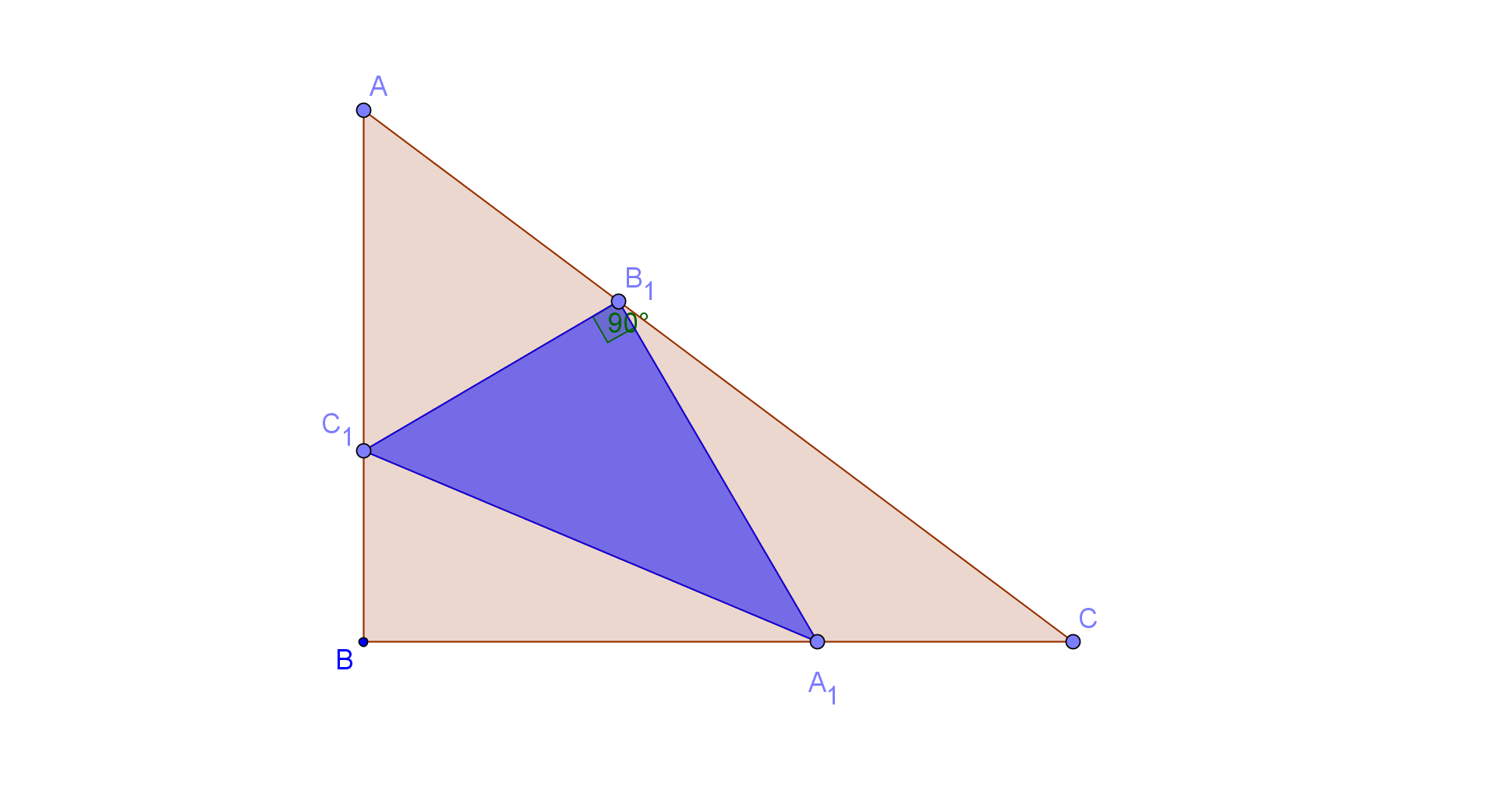
В случае

.



В случае

.



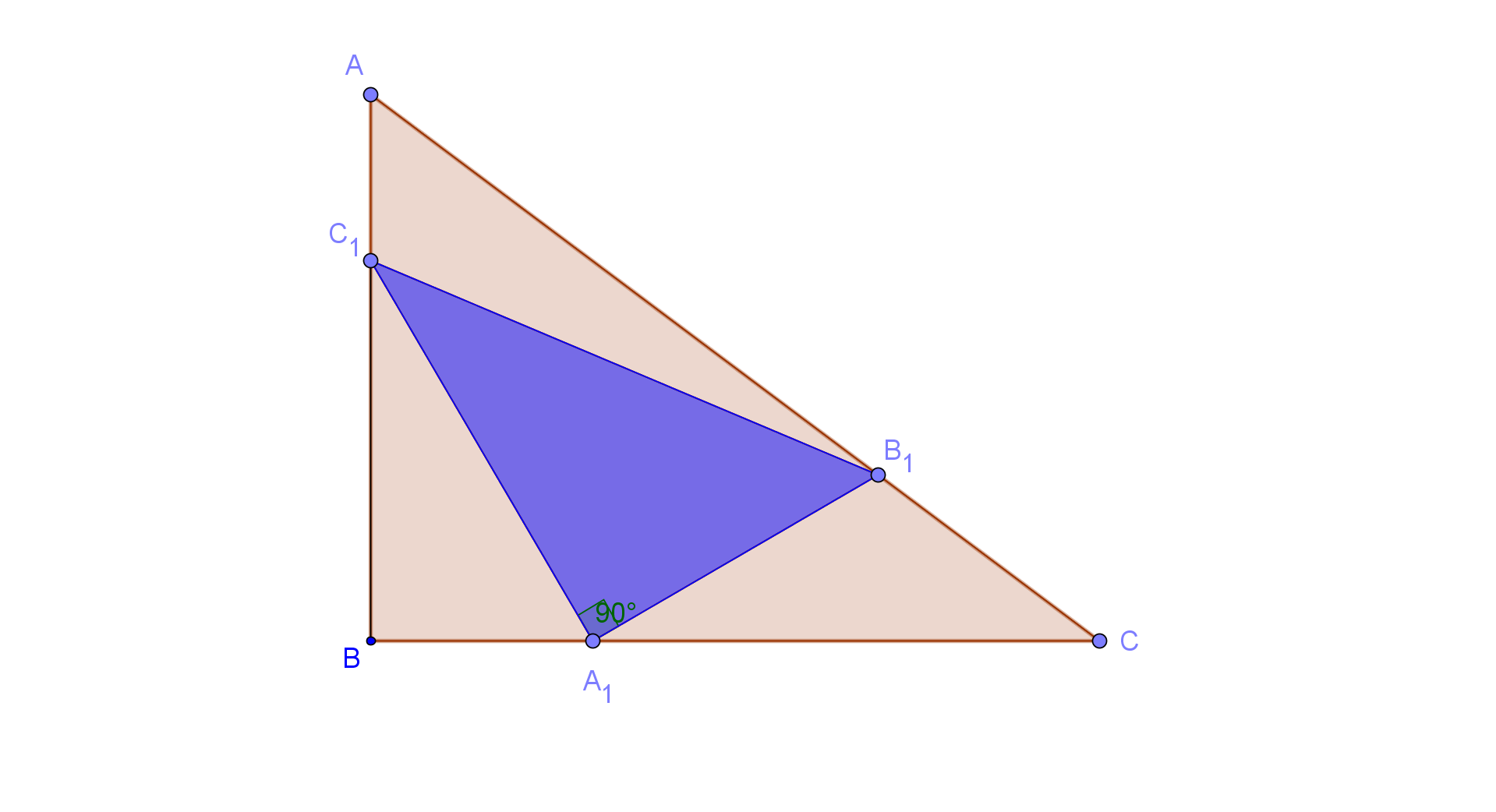
1. Угол при вершине прямой, тогда по теореме косинусов . Подставляем и получаем

В этом случае найденные значения не удовлетворяют условию , и, значит, угол при вершине не может быть прямым.

1. Угол при вершине прямой, тогда по теореме косинусов . Подставляем и получаем

Условию первое значение не удовлетворяет, а в случае

.



Рассмотрим общий случай. Пусть задан прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине B и единичной гипотенузой. Без ограничения общности можно считать, что . Обозначим угол при вершине С через k.

Тогда формулы для квадратов сторон треугольника будут иметь вид

.

1. Угол при вершине прямой, тогда по теореме косинусов . Подставляем и получаем два значения (в случае эти значения совпадают)

В случае

.

В случае

.

1. Угол при вершине прямой, тогда по теореме косинусов . Подставляем и получаем два значения

В нашем случае , поэтому оба значения не принадлежат интервалу (0,1), угол при вершине не может быть прямым.

1. Угол при вершине прямой, тогда по теореме косинусов . Подставляем и получаем два значения (в случае эти значения совпадают)

Условию первое значение не удовлетворяет, а для неравнобедренного треугольника ABC в случае

.

**Таким образом, для неравнобедренного прямоугольного треугольника ABC существует три положения треугольника с отношением площадей**

**А для равнобедренного прямоугольного треугольника ABC существует лишь одно положение треугольника с отношением площадей**