***Задача 236 (5 баллов)***

***Ответ***: 270

***Решение***: При каждое множество должно содержать по одному числу, а так как все числа различны, то условие равенства произедений элементов в множествах не может быть выполнено. Далее .

Пусть для показателей в разложении на простые множители числа - остаток при делении на 3: , а произведение чисел в каждом из трёх множеств равно , тогда , и потому . Следовательно, произведение чисел в четвёртом множестве делится нацело на .

Далее, для простых чисел из интервала показатель , и потому числа и принадлежат четвёртому множеству. А для простых чисел из интервала показатель и потому четвёртому множеству принадлежат числа . Для в пределах от 2 до 9 посчитаем количество таких чисел, образующих множество . При их количество больше, чем , и потому требуемое разбиение на четыре множества отсутсвует.

При четвёртое множество имеет вид , и тогда произведение всех остальных чисел равно , что не возможно, так как показатель 2 не делится на 3.

При четвёртое множество имеет вид , и тогда произведение всех остальных чисел равно , что не возможно, так как показатели 3-ки и 5-ки не делятся на 3.

При четвёртое множество имеет вид , и тогда произведение всех остальных чисел равно , что не возможно, так как показатели 2-ки, 3-ки и 7-ки не делятся на 3.

При в четвёртое множество, кроме чисел , должны входить ещё и два числа, кратных 7, и всего будет уже 10 чисел, что невозможно.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n | Ifactor((4n)!) | F | M(n) |
| 2 |  |  | 4 |
| 3 |  |  | 4 |
| 4 |  |  | 4 |
| 5 |  |  | 6 |
| 6 |  |  | 6 |
| 7 |  |  | 7 |
| 8 |  |  | 9 |
| 9 |  |  | 8 |
| 10 |  |  | 8 |

При четвёртое множество содержит числа . Произведение остальных 32-х чисел равно , поэтому в четвёртое множество должны входить ещё и два числа, кратных 7:, причём , так как все показатели в разложении числа кратны 3-м. Единственный вариант – это 14 и 28.

Условию удовлетворяют следующие множества

Произведение чисел в каждом множестве равно

А сумма чисел в четвёртом множестве равна .

При числа, входящие в множество F, дают сумму большую, чем 270.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n | F | M(n) |
| 11 | {17,19,23,29,31,34,37,38,41,43} | 312 |
| 12 | {17,19,23,29,31,34,37,38,41,43,46,47} | 405 |
| 13 | {19,23,29,31,37,38,41,43,46,47} | 354 |
| 14 | {19,23,29,31,37,38,41,43,46,47,53,} | 407 |
| 15 | {23,29,31,37,41,43,46,47,53,58,59,} | 467 |
| 16 | {23,29,31,37,41,43,46,47,53,58,59,61,62} | 590 |
| 17 | {23,29,31,37,41,43,46,47,53,58,59,61,62,67} | 657 |
| 18 | {29,31,37,41,43,47,53,58,59,61,62,67,71} | 659 |

Далее .

Воспользуемся результатом работы [1], согласно которому для любого в пределах между и существует простое число.

Заметим, что , а . Тогда при каждом на интервале существует простое число , при этом при <2. Таким образом, множество F содержит числа сумма которых больше, чем =. При получаем .

Таким образом, при не существует требуемого разбиения чисел на четыре группы с суммой элементов в четвёртой группе меньше, чем 270.

Рассмотрим другие варианты задачи.

1) Натуральные числа от 1 до 3n разбили на три группы по n чисел в каждой. Оказалось, что произведение всех чисел из первой группы равно произведению всех чисел из второй. Найти наименьшую возможную сумму чисел третьей группы.

В этом случае уже при удается найти требуемое разбиение {4,3},{2,6},{1,5}. А при , очевидно, сумму чисел в третьем множестве уменьшить не получится, ведь сумма первых натуральных чисел уже не меньше 6.

2) Натуральные числа от 1 до 5n разбили на пять групп по n чисел в каждой. Оказалось, что произведения всех чисел из первой группы равно произведению всех чисел из второй, третьей и четвёртой. Для каких n это возможно?

Аналогично, пусть для показателей в разложении на простые множители числа - остаток при делении на 4: , а произведение чисел в каждом из четырёх множеств равно , тогда , и потому . Следовательно, произведение чисел в пятом множестве делится нацело на .

Кроме того, те простые числа, для которых , с учётом кратности входят в качестве множителей в различные числа пятой группы. Таким образом, с необходимостью должна выполняться оценка

Установлено с помощью компьютера, что наименьшее , для которого выполняется эта оценка, равно 436.

Заметим, что аналогичный подход в исходной задаче сразу же даёт .

**Список литературы**

1. *J. Nagura.* On the interval containing at least one prime number // Proceedings of the Japan Academy, Series A. — 1952. — Vol. 28. — P. 177–181. — [DOI](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B8%D1%84%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80_%D1%86%D0%B8%D1%84%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BE%D0%B1%D1%8A%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%B0):[10.3792/pja/1195570997](https://dx.doi.org/10.3792%2Fpja%2F1195570997).