***Задача 236 (5 баллов)***

***Ответ***: 270

***Решение***: При $n=1$ каждое множество должно содержать по одному числу, а так как все числа различны, то условие равенства произедений элементов в множествах не может быть выполнено. Далее $n\geq 2$.

Пусть для показателей $α\_{i}$ в разложении на простые множители числа $\left(4n\right)!=p\_{1}^{α\_{1}}∙…∙p\_{s}^{α\_{s}}$ $r\_{i} $- остаток при делении на 3: $α\_{i}=3t\_{i}+r\_{i},0\leq r\_{i}\leq 2$, а произведение чисел в каждом из трёх множеств равно $p\_{1}^{β\_{1}}∙…∙p\_{s}^{β\_{s}}$, тогда $3β\_{i}\leq α\_{i}$, и потому $α\_{i}-3β\_{1}\geq r\_{i}$. Следовательно, произведение чисел в четвёртом множестве делится нацело на $p\_{1}^{r\_{1}}∙…∙p\_{s}^{r\_{s}}$.

Далее, для простых чисел $p\_{i}$ из интервала $\left(\frac{4n}{3},2n\right) $показатель $α\_{i}=2$, и потому числа $p\_{i}$ и $2p\_{i}$ принадлежат четвёртому множеству. А для простых чисел $p\_{i}$ из интервала $\left(2n,4n\right) $ показатель $α\_{i}=1,$ и потому четвёртому множеству принадлежат числа $p\_{i}$. Для $ n$ в пределах от 2 до 9 посчитаем количество таких чисел, образующих множество $F$. При $n=2,3,5,8$ их количество $M(n)$ больше, чем $n$, и потому требуемое разбиение на четыре множества отсутсвует.

При $n=4$ четвёртое множество имеет вид $\left\{7,11,13,14\right\}$ , и тогда произведение всех остальных чисел равно $2^{14}∙3^{6}∙5^{3}$, что не возможно, так как показатель 2 не делится на 3.

При $n=6$ четвёртое множество имеет вид $\left\{11,13,17,19,22,23\right\}$ , и тогда произведение всех остальных чисел равно $2^{21}∙3^{10}∙5^{4}∙7^{3}$, что не возможно, так как показатели 3-ки и 5-ки не делятся на 3.

При $n=7$ четвёртое множество имеет вид $\left\{11,13,17,19,22,23,26\right\}$ , и тогда произведение всех остальных чисел равно $2^{23}∙3^{13}∙5^{6}∙7^{4}$, что не возможно, так как показатели 2-ки, 3-ки и 7-ки не делятся на 3.

При $ n=9$ в четвёртое множество, кроме чисел $\left\{13,17,19,23,26,29,31,34\right\}$, должны входить ещё и два числа, кратных 7, и всего будет уже 10 чисел, что невозможно.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n | Ifactor((4n)!) | F | M(n) |
| 2 | $$2^{7}∙3^{2}∙5∙7$$ | $$\left\{3,5,6,7\right\}$$ | 4 |
| 3 | $$2^{10}∙3^{5}∙5^{2}∙7∙11$$ | $$\left\{5,7,10,11\right\}$$ | 4 |
| 4 | $$2^{15}∙3^{6}∙5^{3}∙7^{2}∙11∙13$$ | $$\left\{7,11,13,14\right\}$$ | 4 |
| 5 | $$2^{18}∙3^{8}∙5^{4}∙7^{2}∙11∙13∙17∙19$$ | $$\left\{7,11,13,14,17,19\right\}$$ | 6 |
| 6 | $$2^{22}∙3^{10}∙5^{4}∙7^{3}∙11^{2}∙13∙17∙19∙23$$ | $$\left\{11,13,17,19,22,23\right\}$$ | 6 |
| 7 | $$2^{25}∙3^{13}∙5^{6}∙7^{4}∙11^{2}∙13^{2}∙17∙19∙23$$ | $$\left\{11,13,17,19,22,23,26\right\}$$ | 7 |
| 8 | $$2^{31}∙3^{14}∙5^{7}∙7^{4}∙11^{2}∙13^{2}∙17∙19∙23∙29∙31$$ | $$\left\{11,13,17,19,22,23,26,29,31\right\}$$ | 9 |
| 9 | $$2^{34}∙3^{17}∙5^{8}∙7^{5}∙11^{3}∙13^{2}∙17^{2}∙19∙23∙29∙31$$ | $$\left\{13,17,19,23,26,29,31,34\right\}$$ | 8 |
| 10 | $$2^{38}∙3^{18}∙5^{9}∙7^{5}∙11^{3}∙13^{3}∙17^{2}∙19^{2}∙23∙29∙31∙37$$ | $$\left\{17,19,23,29,31,34,37,38\right\}$$ | 8 |

При $ n=10$ четвёртое множество содержит числа $\left\{17,19,23,29,31,34,37,38\right\}$. Произведение остальных 32-х чисел равно $P=2^{36}∙3^{18}∙5^{9}∙7^{5}∙11^{3}∙13^{3}$ , поэтому в четвёртое множество должны входить ещё и два числа, кратных 7:$ 7h,7g$, причём $hg=y^{3}$, так как все показатели в разложении числа $P $ кратны 3-м. Единственный вариант – это 14 и 28.

Условию удовлетворяют следующие множества

$$A=\left\{1,6,10,12,16,21,24,25,33,39\right\}$$

$$B=\left\{2,5,7,8,20,22,26,27,30,36\right\}$$

$$C=\left\{3,4,9,11,13,15,18,32,35,40\right\}$$

Произведение чисел в каждом множестве равно $186810624000=2^{11}∙3^{6}∙5^{3}∙7∙11∙13.$

А сумма чисел в четвёртом множестве $\left\{14,17,19,23,28,29,31,34,37,38\right\}$ равна $270$.

При $11\leq n\leq 18$ числа, входящие в множество F, дают сумму большую, чем 270.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n | F | M(n) |
| 11 | {17,19,23,29,31,34,37,38,41,43} | 312 |
| 12 | {17,19,23,29,31,34,37,38,41,43,46,47} | 405 |
| 13 | {19,23,29,31,37,38,41,43,46,47} | 354 |
| 14 | {19,23,29,31,37,38,41,43,46,47,53,} | 407 |
| 15 | {23,29,31,37,41,43,46,47,53,58,59,} | 467 |
| 16 | {23,29,31,37,41,43,46,47,53,58,59,61,62} | 590 |
| 17 | {23,29,31,37,41,43,46,47,53,58,59,61,62,67} | 657 |
| 18 | {29,31,37,41,43,47,53,58,59,61,62,67,71} | 659 |

Далее $n\geq 19$.

Воспользуемся результатом работы [1], согласно которому для любого $x\geq 25$ в пределах между $x$ и $\frac{6x}{5}$ существует простое число.

Заметим, что $\frac{4n}{3}\geq 25$, а $\frac{4n}{3}\left(\frac{6}{5}\right)^{6}<4n$. Тогда при каждом $i=1,…,6 $ на интервале $((\frac{6}{5})^{i-1}\frac{4n}{3},(\frac{6}{5})^{i}\frac{4n}{3})$ существует простое число $q\_{i}>(\frac{6}{5})^{i-1}\frac{4n}{3}$, при этом при $i=1,2 $ $q\_{i}<\frac{4n}{3}(\frac{6}{5})^{2}<\frac{48}{25}$<2. Таким образом, множество F содержит числа $q\_{1},q\_{2},q\_{3},q\_{4},q\_{5},q\_{6},2q\_{1},2q\_{2},$ сумма которых больше, чем $\sum\_{i=1}^{6}(\frac{6}{5})^{i-1}\frac{4n}{3}+2\frac{4n}{3}+2\frac{6}{5}\frac{4n}{3}$=$\frac{1134452}{3125}n$. При $n\geq 19 $получаем $\frac{1134452}{3125}n\geq 363$.

Таким образом, при $n\geq 11$ не существует требуемого разбиения чисел на четыре группы с суммой элементов в четвёртой группе меньше, чем 270.

Рассмотрим другие варианты задачи.

1) Натуральные числа от 1 до 3n разбили на три группы по n чисел в каждой. Оказалось, что произведение всех чисел из первой группы равно произведению всех чисел из второй. Найти наименьшую возможную сумму чисел третьей группы.

В этом случае уже при $n=2$ удается найти требуемое разбиение {4,3},{2,6},{1,5}. А при $n\geq 3$, очевидно, сумму чисел в третьем множестве уменьшить не получится, ведь сумма первых $n$ натуральных чисел $\frac{n(n-1)}{2} $уже не меньше 6.

2) Натуральные числа от 1 до 5n разбили на пять групп по n чисел в каждой. Оказалось, что произведения всех чисел из первой группы равно произведению всех чисел из второй, третьей и четвёртой. Для каких n это возможно?

Аналогично, пусть для показателей $α\_{i}$ в разложении на простые множители числа $\left(5n\right)!=p\_{1}^{α\_{1}}∙…∙p\_{s}^{α\_{s}}$ $r\_{i} $- остаток при делении на 4: $α\_{i}=4t\_{i}+r\_{i},0\leq r\_{i}\leq 3$, а произведение чисел в каждом из четырёх множеств равно $p\_{1}^{β\_{1}}∙…∙p\_{s}^{β\_{s}}$, тогда $4β\_{i}\leq α\_{i}$, и потому $α\_{i}-4β\_{1}\leq r\_{i}$. Следовательно, произведение чисел в пятом множестве делится нацело на $p\_{1}^{r\_{1}}∙…∙p\_{s}^{r\_{s}}$.

Кроме того, те простые числа, для которых $p\_{i}>\sqrt{5n}$, с учётом кратности входят в качестве множителей в различные числа пятой группы. Таким образом, с необходимостью должна выполняться оценка

$$\sum\_{p\_{i}>\sqrt{5n} }^{}r\_{i}\leq n.$$

Установлено с помощью компьютера, что наименьшее $n$, для которого выполняется эта оценка, равно 436.

Заметим, что аналогичный подход в исходной задаче сразу же даёт $n=4, n\geq 10$.

**Список литературы**

1. *J. Nagura.* On the interval containing at least one prime number // Proceedings of the Japan Academy, Series A. — 1952. — Vol. 28. — P. 177–181. — [DOI](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B8%D1%84%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80_%D1%86%D0%B8%D1%84%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BE%D0%B1%D1%8A%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%B0):[10.3792/pja/1195570997](https://dx.doi.org/10.3792/pja/1195570997).