***Задача 238 (5 баллов)***

***Ответ***: При $k=11.$

***Решение***: При натуральных $k\geq 2$ и $a$ рассмотрим отношение

$$P\left(k,a\right)=\frac{a\left(a+1\right)\left(a+2\right)…(a+k-1)}{НОК(a,\left(a+1\right),\left(a+2\right),…,(a+k-1))}$$

Понятно, что в разложении на простые множители $P\left(k,a\right)=p\_{1}^{α\_{1}}∙\cdots ∙p\_{s}^{α\_{s}}$ присутствуют только простые числа $p\_{j}<k$, так как при $p\_{j}\geq k$ среди $k$ последовательных чисел максимум одно число, кратное $p\_{j}$.

Кроме того, если для натуральных $m$ и $t $выполнены неравенства $tm\leq k<\left(t+1\right)m$, то среди $k$ идущих подряд натуральных чисел есть, по крайней мере, $t$ натуральных чисел, кратных $m$.

А при $k=tm$ таких чисел ровно $t.$

Далее, при $tm<k<\left(t+1\right)m$ среди $k$ идущих подряд натуральных чисел, первое из которых кратно $m$ есть ровно $t+1$ натуральных чисел, кратных $m$.

И при $tm<k<\left(t+1\right)m$ среди $k$ идущих подряд натуральных чисел, первое из которых при делении на число $m$ даёт остаток 1, есть ровно $t$ натуральных чисел, кратных $m$.

Для простого числа $p\_{j}<k$ определим $β\_{j}=\left⌊log\_{p\_{j}}k\right⌋$. Пусть число $p\_{j}$ в разложение на простые множители числа $НОК(a,\left(a+1\right),\left(a+2\right),…,(a+k-1))$ входит с показателем $β\_{j}^{1}\geq β\_{j} .$

Определим, с каким показателем $γ\_{j}$ входит число $p\_{j}$ в разложение на простые множители числа $a\left(a+1\right)\left(a+2\right)…(a+k-1)$ . Для каждого натурального $t$ среди $k$ идущих подряд натуральных чисел не больше, чем $\left⌈\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌉$, кратных $p\_{j}^{t}$. Причём в случае $β\_{j}^{1}>β\_{j}$ среди чисел, кратных $p\_{j}^{β\_{j}}$, не больше одного кратного $p\_{j}^{β\_{j}^{1}}$.

Поэтому $γ\_{j}\leq \sum\_{t\geq 1}^{}\left⌈\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌉+β\_{j}^{1}-β\_{j} $.

Следовательно,

 $α\_{j}\leq \sum\_{t\geq 1}^{}\left⌈\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌉-\left⌊log\_{p\_{j}}k\right⌋$*.* (1)

С другой стороны, для каждого натурального $t$ среди $k$ идущих подряд натуральных чисел не меньше, чем кратных $\left⌊\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌋$, кратных $p\_{j}^{t}$. Поэтому $γ\_{j}\geq \sum\_{t\geq 1}^{}\left⌊\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌋$.

 Следовательно,

 $α\_{j}\geq \sum\_{t\geq 1}^{}\left⌊\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌋-\left⌊log\_{p\_{j}}k\right⌋$. (2)

Таким образом,

$$\prod\_{j:p\_{j}<k}^{}p\_{j}^{\sum\_{t\geq 1}^{}\left⌊\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌋-\left⌊log\_{p\_{j}}k\right⌋}\leq P\left(k,a\right)\leq \prod\_{j:p\_{j}<k}^{}p\_{j}^{\sum\_{t\geq 1}^{}\left⌈\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌉-\left⌊log\_{p\_{j}}k\right⌋}$$

Оценка (1) достигается для чисел $a$, удовлетворяющих условию $a mod p\_{j}^{β\_{j}}=0$.

А оценка (2) достигается для чисел $a$, удовлетворяющих условию $a mod p\_{j}^{β\_{j}}=1$.

Таким образом, максимальным значение $P\left(k,a\right)$ будет в случае, если при каждом $j$, таком что $p\_{j}<k$ и $a mod p\_{j}^{β\_{j}}=0$, например, при $a=\overbar{a}=\prod\_{j:p\_{j}<k}^{}p\_{j}^{β\_{j}}$, а минимальным значение $P\left(k,a\right)$ будет в случае, если при каждом $j$, таком что $p\_{j}<k:$ $a mod p\_{j}^{β\_{j}}=1$, например, при $a=\overline{a}=1+\prod\_{j:p\_{j}<k}^{}p\_{j}^{β\_{j}}$.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$k$$ | $$p\_{j}$$ | $$maxP(k,a)$$ | $$minP(k,a)$$ | $$maxP(k,a)/minP(k,a)$$ |
| 2 | - | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 2,3 | 6 | 2 | 3 |
| 5 | 2,3 | 24 | 2 | 12 |
| 6 | 2,3,5 | 120 | 12 | 10 |
| 7 | 2,3,5 | 720 | 12 | 60 |
| 8 | 2,3,5,7 | 5040 | 48 | 105 |
| 9 | 2,3,5,7 | 40320 | 144 | 280 |
| 10 | 2,3,5,7 | 362880 | 1440 | 252 |
| 11 | 2,3,5,7 | 3628800 | 1440 | 2520 |

Видим, что при $k\leq 10:$ $\frac{maxP\left(k,a\right)}{minP\left(k,a\right)}<2018$.

Так как при $b>a: $

 $\frac{НОК(a,\left(a+1\right),\left(a+2\right),…,(a+k-1))}{НОК(b,\left(b+1\right),\left(b+2\right),…,\left(b+k-1)\right)}$=$\frac{P\left(k,b\right)}{P\left(k,a\right)}∙\frac{a\left(a+1\right)\left(a+2\right)…\left(a+k-1\right)}{b\left(b+1\right)\left(b+2\right)…\left(b+k-1\right)}<\frac{P\left(k,b\right)}{P\left(k,a\right)}$, а $\frac{P\left(k,b\right)}{P\left(k,a\right)}\leq \frac{maxP(k,a)}{minP(k,a)}$,

и поэтому $\frac{НОК(a,\left(a+1\right),\left(a+2\right),…,(a+k-1))}{НОК(b,\left(b+1\right),\left(b+2\right),…,\left(b+k-1)\right)}\leq \frac{maxP(k,a)}{minP(k,a)}$, то искомое значение $k\geq 11$.

А при $k=11$ мы нашли подходящий пример:

$НОК\left(21169,21170,…,21179\right)=266360272672594332625289704819446735660960600$,

$НОК\left(21600,21601,…,21610\right)=131927062671653901889555955331397011909600$,

 $\frac{НОК\left(21169,21170,…,21179\right)}{НОК\left(21600,21601,…,21610\right)}=2018,$99646…

В заключение вычислим $maxP(k,a)/minP(k,a)$. Если $k mod p\_{j}^{s\_{j}}=0$, а $k mod p\_{j}^{s\_{j}+1}\ne 0$ , то при $t\leq s\_{j}:\left⌊\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌋=\left⌈\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌉ $, а при $t>s\_{j}:\left⌊\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌋+1=\left⌈\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌉$, так что с учётом (1) и (2) имеем $\left(\sum\_{t\geq 1}^{}\left⌈\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌉-\left⌊log\_{p\_{j}}k\right⌋\right)-\left(\sum\_{t\geq 1}^{}\left⌊\frac{k}{p\_{j}^{t}}\right⌋-\left⌊log\_{p\_{j}}k\right⌋\right)=\sum\_{t>s}^{}1=β\_{j}-s\_{j}$.

И окончательно

$$\frac{maxP\left(k,a\right)}{minP\left(k,a\right)}=\prod\_{j:p\_{j}<k}^{}p\_{j}^{β\_{j}-s\_{j}}$$

Причём с ростом значений $b>a$ значение $\frac{НОК(a,\left(a+1\right),\left(a+2\right),…,(a+k-1))}{НОК(b,\left(b+1\right),\left(b+2\right),…,\left(b+k-1)\right)}$ может как угодно близко подходить к $\frac{maxP\left(k,a\right)}{minP\left(k,a\right)}=\prod\_{j:p\_{j}<k}^{}p\_{j}^{β\_{j}-s\_{j}}$