***Задача 238 (5 баллов)***

***Ответ***: При

***Решение***: При натуральных и рассмотрим отношение

Понятно, что в разложении на простые множители присутствуют только простые числа , так как при среди последовательных чисел максимум одно число, кратное .

Кроме того, если для натуральных и выполнены неравенства , то среди идущих подряд натуральных чисел есть, по крайней мере, натуральных чисел, кратных .

А при таких чисел ровно

Далее, при среди идущих подряд натуральных чисел, первое из которых кратно есть ровно натуральных чисел, кратных .

И при среди идущих подряд натуральных чисел, первое из которых при делении на число даёт остаток 1, есть ровно натуральных чисел, кратных .

Для простого числа определим . Пусть число в разложение на простые множители числа входит с показателем

Определим, с каким показателем входит число в разложение на простые множители числа . Для каждого натурального среди идущих подряд натуральных чисел не больше, чем , кратных . Причём в случае среди чисел, кратных , не больше одного кратного .

Поэтому .

Следовательно,

*.* (1)

С другой стороны, для каждого натурального среди идущих подряд натуральных чисел не меньше, чем кратных , кратных . Поэтому .

Следовательно,

. (2)

Таким образом,

Оценка (1) достигается для чисел , удовлетворяющих условию .

А оценка (2) достигается для чисел , удовлетворяющих условию .

Таким образом, максимальным значение будет в случае, если при каждом , таком что и , например, при , а минимальным значение будет в случае, если при каждом , таком что , например, при .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 2 | - | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 2,3 | 6 | 2 | 3 |
| 5 | 2,3 | 24 | 2 | 12 |
| 6 | 2,3,5 | 120 | 12 | 10 |
| 7 | 2,3,5 | 720 | 12 | 60 |
| 8 | 2,3,5,7 | 5040 | 48 | 105 |
| 9 | 2,3,5,7 | 40320 | 144 | 280 |
| 10 | 2,3,5,7 | 362880 | 1440 | 252 |
| 11 | 2,3,5,7 | 3628800 | 1440 | 2520 |

Видим, что при .

Так как при

=, а ,

и поэтому , то искомое значение .

А при мы нашли подходящий пример:

,

,

99646…

В заключение вычислим . Если , а , то при , а при , так что с учётом (1) и (2) имеем .

И окончательно

Причём с ростом значений значение может как угодно близко подходить к