***Задача 245 (5 баллов)***

***Ответ:*** $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2} $или $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{2}.$

Выведено условие для треугольника, подобного треугольнику, составленному из его высот - равенство (1)

Выведено условие для треугольника, подобного треугольнику, составленному из его медиан – равенство (3).

Доказано, что не существует прямоугольного треугольника, подобного треугольнику, составленному из его биссектрис.

***Решение***: Пусть треугольник со сторонами $a<b<c$ подобен треугольнику, составленному из своих высот $h\_{c}<h\_{b}<h\_{a}$. Тогда $\frac{a}{h\_{c}}=\frac{b}{h\_{b}}=\frac{c}{h\_{a}}$, и так как $S=\frac{1}{2}a∙h\_{a}=\frac{1}{2}b∙h\_{b}=\frac{1}{2}c∙h\_{c}$ , получаем

$ac=b^{2}$. (1)

Для прямоугольного треугольника с учётом $c^{2}=a^{2}+b^{2}$ получаем $c^{2}=a^{2}+ac$, и затем $\frac{c}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. И окончательно

$b=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}a,с=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a.$(2)

В таком треугольнике острые углы равны $\arcsin(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)), \arccos(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right))$ ($38,17^{0}, 51,83^{0}$ в градусах).

Пусть треугольник со сторонами $a<b<c$ подобен треугольнику, составленному из своих медиан $m\_{c}<m\_{b}<m\_{a}$. Тогда $\frac{a}{m\_{c}}=\frac{b}{m\_{b}}=\frac{c}{m\_{a}} , $и так как

$$m\_{a}^{2}=\frac{1}{4}\left(2b^{2}+2c^{2}-a^{2}\right)$$

$$m\_{c}^{2}=\frac{1}{4}\left(2b^{2}+2a^{2}-c^{2}\right)$$

из равенства $a∙m\_{a}=c∙m\_{c}$ последовательно получаем $a^{2}m\_{a}^{2}=c^{2}m\_{c}^{2}⇒a^{2}\left(2b^{2}+2c^{2}-a^{2}\right)=c^{2}\left(2b^{2}+2a^{2}-c^{2}\right)⇒c^{4}-a^{4}=2b^{2}\left(c^{2}-a^{2}\right)⇒$

$c^{2}+a^{2}=2b^{2}$. (3)

 А так как $m\_{b}^{2}=\frac{1}{4}\left(2a^{2}+2c^{2}-b^{2}\right)$, то из равенства $b∙m\_{a}=c∙m\_{b}$ последовательно получаем $b^{2}m\_{a}^{2}=c^{2}m\_{b}^{2}⇒b^{2}\left(2b^{2}+2c^{2}-a^{2}\right)=c^{2}\left(2a^{2}+2c^{2}-b^{2}\right)$.

А с учётом (3) $b^{2}\left(c^{2}+a^{2}+2c^{2}-a^{2}\right)=c^{2}\left(4b^{2}-b^{2}\right)⟹3b^{2}c^{2}=3c^{2}b^{2}$ получаем тождество.

Таким образом, для треугольника, подобного треугольнику, составленному из своих медиан, выполняется равенство (3).

Для прямоугольного треугольника с учётом $c^{2}=a^{2}+b^{2}$ получаем

 $b=\sqrt{2}a,c=\sqrt{3}a$ (4)

В таком треугольнике острые углы равны $\arcsin(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)), \arccos(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right))$ ($35,26^{0}, 54,74^{0}$ в градусах).

В нашей задаче возможны таакие варианты

1. Из (4) берём $AH=\sqrt{2}BH$, а из (2) берём $HC=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}BH$.

$$\frac{S\_{ABH}}{S\_{CBH}}=\frac{\frac{1}{2}AH∙BH}{\frac{1}{2}CH∙BH}=\frac{AH}{CH}=\frac{\sqrt{2}BH}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}BH}=\sqrt{\sqrt{5}-1}$$

$$∠ABC=\arccos(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right))+\arccos(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=1,85…)>\frac{π}{2}$$

1. Из (4) берём $AH=\frac{1}{\sqrt{2}}BH$, а из (2) берём $HC=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}BH$.

$$\frac{S\_{ABH}}{S\_{CBH}}=\frac{\frac{1}{2}AH∙BH}{\frac{1}{2}CH∙BH}=\frac{AH}{CH}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}BH}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}BH}=\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$$

$$∠ABC=\arcsin(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right))+\arccos(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=1.52…<)\frac{π}{2}$$



1. Из (4) берём $AH=\sqrt{2}BH$, а из (2) берём $HC=\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}BH$.

$$\frac{S\_{ABH}}{S\_{CBH}}=\frac{\frac{1}{2}AH∙BH}{\frac{1}{2}CH∙BH}=\frac{AH}{CH}=\frac{\sqrt{2}BH}{\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}BH}=\sqrt{\sqrt{5}+1}$$

$$∠ABC=\arccos(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right))+\arcsin(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right))=1,62…>\frac{π}{2}$$

1. Из (4) берём $AH=\frac{1}{\sqrt{2}}BH$, а из (2) берём $HC=\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}BH$.

$$\frac{S\_{ABH}}{S\_{CBH}}=\frac{\frac{1}{2}AH∙BH}{\frac{1}{2}CH∙BH}=\frac{AH}{CH}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}BH}{\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}BH}=\frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{2}$$

$$∠ABC=\arcsin(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right))+\arcsin(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right))=1,28…<\frac{π}{2}$$



В 1) и 3) случаях получаются тупоугольные треугольники, их исключаем из рассмотрения.

***Замечание*** Оказывается, чтопрямоугольного треугольника, подобного треугольнику, составленному из его биссектрис, не существует.

Действительно, в этом случае из решения задачи 243 следует, что один из острых углов равен 600. Непосредственным вычислением убеждаемся, что тогда $\frac{с}{l\_{a}}=\frac{a}{l\_{b}}=1,115…\ne 1,5=\frac{b}{l\_{b}}$.