Задача 250 (5 баллов)

Ответ: 13 - наименьшее возможное количество рёбер выпуклого многогранника, для которого равны сумма длин рёбер и сумма длин диагоналей.

Рассмотрены также и другие смежные вопросы.

Решение:

Через каждую вершину многранника проведём плоскость, перпендикулярную диагонали A_kA_s. Так как при пересечении любой плоскостью, перепендикулярной диагонали A_kA_s, образуется многоугольник с не менее, чем тремя сторонами, то части рёбер, лежащие между двумя соседними плоскостями, принадлежат не меньше, чем трём рёбрам многранника, и все они проектируются в отрезок диагонали A_kA_s, лежащий между двумя соседними плоскостями. Поэтому утроенная длина этого отрезка не больше (а для двух крайних отрезков меньше) , чем сумма длин частей рёбер, лежащих между этими двумя соседними плоскостями. Поэтому для каждого выпуклого многранника сумма длин рёбер P больше, чем утроенная длина диагонали.

Следовательно**, у многранника, сумма длин диагоналей *S* которого равна сумме длин рёбер *P*, должно быть не менее четырёх диагоналей**.

Пусть в выпуклом многограннике V вершин, E рёбер, F граней,

$H=(f_3,f_4,\dots,f_k)$ – вектор граней, где f_i – количество i-уголных граней. Тогда

$$F=f_3+f_4+\dots+f_k, \qquad (1)$$

количество рёбер равно

$$E=(3f_3+4f_4+\dots+kf_k)/2, \qquad (2)$$

а из теоремы Эйлера для многранников следует

$$V=E+2-F=\frac{f_3+2f_4+\dots+(k-2)f_k}{2}+2. \qquad (3)$$

В выпуклом n −угольнике всего $n(n-3)/2$ диагоналей. Поэтому суммарное количество диагоналей всех граней равно

$$2f_4+5f_5+\dots+k(k-3)f_k/2. \qquad (4)$$

Тогда количество диагоналей D выпуклого многранника можно определить, как $D=\frac{V(V-1)}{2}-E-(2f_4+5f_5+\dots+k(k-3)f_k)/2.$

В нашем случае должна выполняться оценка

$$\frac{V(V-1)}{2} - E - (2f_4 + 5f_5 + \cdots + k(k-3)f_k)/2 \geq 4 \qquad (5)$$

Поскольку в каждой вершине сходится не менее трёх рёбер, а ребро соединяет две вершины, то справедлива оценка

$$2E \geq 3V. \qquad (6)$$

А поскольку у каждой грани не менее, чем три стороны, которые являются рёбрами многранника, то также справедлива и оценка

$$2E \geq 3F. \qquad (7)$$

Для нахождения всех многранников с $E \leq 13$ с учётом (1)-(4) перебираем все возможные значения вектора граней (f_3, f_4, f_5, f_6), удовлетворяющие условиям

$$f_k \leq \frac{26}{k}, k = 3,4,5,6$$

$$\frac{3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_k}{2} \leq 13,$$

и условиям (5)-(7).

Находим следующие варианты

1) $H = (0,6),\quad E = 12, F = 6, V = 8, D = 4$ (1 конфигурация)

2) $H = (2,5),\quad E = 13, F = 7, V = 8, D = 5$ (2 конфигурации)

3) $H = (3,3,1), E = 13, F = 7, V = 8, D = 4$ (5 конфигураций)

4) $H = (6,2),\quad E = 13, F = 8, V = 7, D = 4$ (9 конфигураций)

Таким образом $E \geq 12$.

Рассмотрим случай 1). В этом случае неравенство (6) переходит в равенство, поэтому в каждой вершине сходится ровно три ребра, и получается многогранник с графом, изображенным на рисунке.

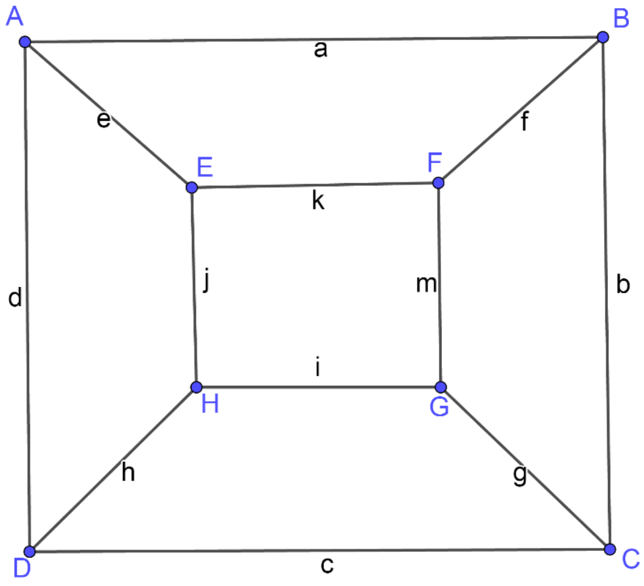
Из неравенства треугольника получаем

$$AG < e + k + m,$$

$$EC < g + i + j,$$

$$DF < c + b + f,$$

$$BH < a + d + h,$$

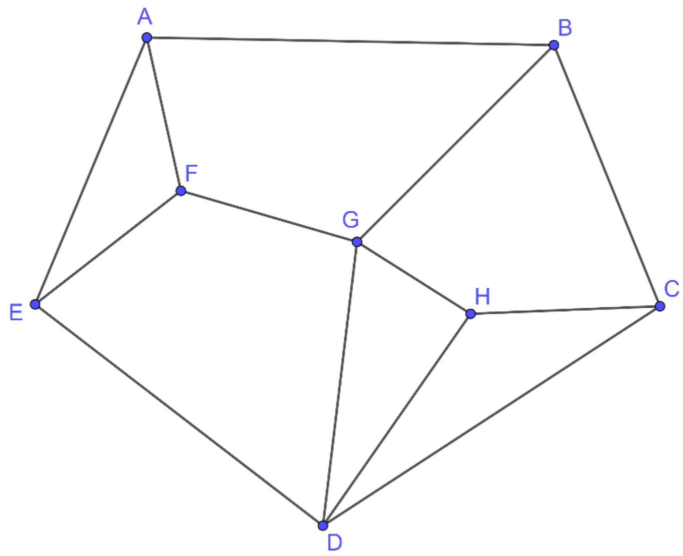


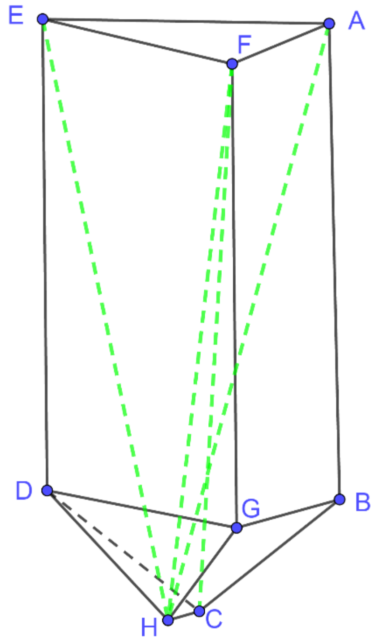
Складывая полученные неравенства, получаем

$$S = AG + EC + DF + BH < \\ < e + k + m + g + i + j + c + b + f + a + d + h = P$$

Таким образом, при $E = 12$ равенство $S = P$ невозможно, и поэтому $E \geq 13$.

Построим пример многранника с необходимым свойством и $E = 13$. Рассмотрим многранник M_1 с $H = (3,3,1), E = 13, F = 7, V = 8, D = 4$ с соответвстующим графом,





и при этом пусть $BGDAFE$ - правильная треугольная призма с длиной стороны основания $BG = a_1$ и высотой h_1, $BC = BD, HC = \frac{GB}{2}$, $HC \parallel GB$, а расстояние между ребром HC и плоскостью BGD равно h_2.
Тогда при фиксированных значениях a_1,h_2 и при $h_1 \longrightarrow +\infty$

$$S = AH + FH + FC + EH = 4h_1(1 + o(1)),$$

При определении главного члена асимптотики суммы длин рёбер основной вклад дают три ребра AB, FG, ED, длины которых стремятся к бесконечности, а длины остальных рёбер остаются неизменными. Поэтому

$$P = 3h_1\big(1 + o(1)\big)$$

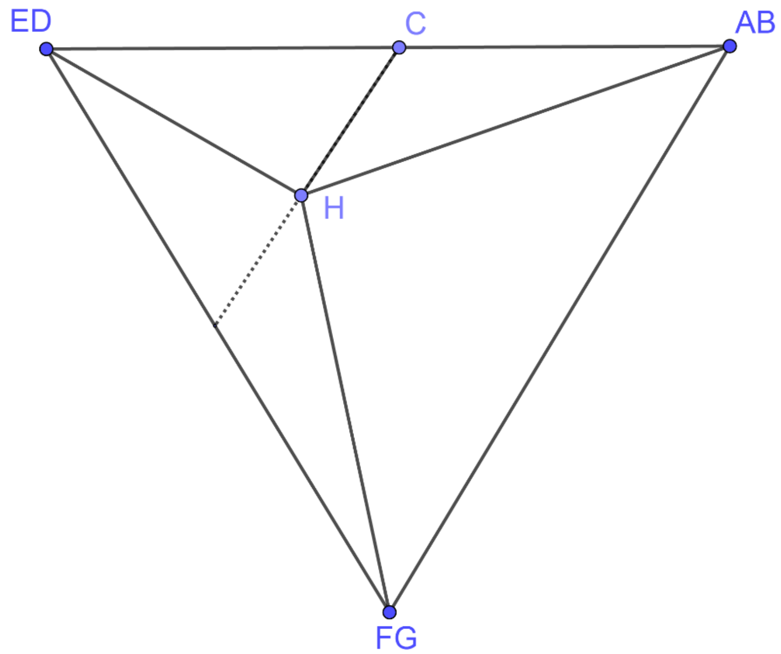
и, следовательно,

$$\frac{S}{P} = \frac{4}{3}(1 + o(1)) \text{ при } h_1 \longrightarrow +\infty. \qquad (8)$$

Теперь при фиксированном значении a_1 и при $h_1, h_2 \longrightarrow 0$ в предельном положении совпадают точки A и B , точки E и D, точки F и G. Поэтому

$$S = AH + FH + FC + EH =$$

$$= (a_1\frac{\sqrt{7}}{4} + a_1\frac{\sqrt{7}}{4} + a_1\frac{\sqrt{3}}{2} + a_1\frac{\sqrt{3}}{4})(1 + o(1).$$



Аналогично находим главный член асимптотики для суммы рёбер P

$$P = (6a_1 + a_1\frac{\sqrt{3}}{4} + a_1\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{a_1}{4})\big(1 + o(1)\big),$$

а затем и для отношения $\frac{S}{P}$

$$\frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{25}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}}\big(1 + o(1)\big) \text{ при } h_1, h_2 \longrightarrow 0, \qquad (9)$$

Из (8) следует, что при достаточно большом h_1

$$S > P,$$

а из (9) следует (поскольку $\frac{\frac{\sqrt{7}}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{25}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}} < 1$), что при достаточно малых h_1, h_2

$$S < P.$$

Поэтому при непрерывном изменении h_1, h_2 найдутся такие их значения и соответствующий им многогранник M, что $S = P$.

Таким образом, **13 - наименьшее возможное количество рёбер выпуклого многогранника, для которого равны сумма длин рёбер и сумма длин диагоналей.**

Интересен вопрос о наименьшем возможном количестве граней у выпуклого многогранника, для которого равны сумма длин рёбер и сумма длин диагоналей.

Для найденного нами многогранника M: $F = 7$. А перебор, аналогичный предыдущему, показывает, что при ограничении с $F < 7$ есть только один вариант: $H = (0,6)$, $E = 12, F = 6, V = 8, D = 4$, и ему соответствующий один многранник, для которого, как мы уже проверили $S < P$.

Таким образом, **7 - наименьшее возможное количество граней выпуклого многогранника, для которого равны сумма длин рёбер и сумма длин диагоналей.**

Изучим вопрос о наименьшем возможном количестве вершин у выпуклого многогранника, для которого равны сумма длин рёбер и сумма длин диагоналей.

Для найденного нами многогранника M: $V = 8$. А перебор, аналогичный предыдущему, показывает, что при ограничении с $V < 8$ существуют следующие варианты

4) $H = (6,2)$, $E = 13, F = 8, V = 7, D = 4$ (9 конфигураций)

5) $H = (8,1)$, $E = 14, F = 9, V = 7, D = 5$ (12 конфигураций)

6) $H = (10)$, $E = 15, F = 10, V = 7, D = 6$ (5 конфигураций)

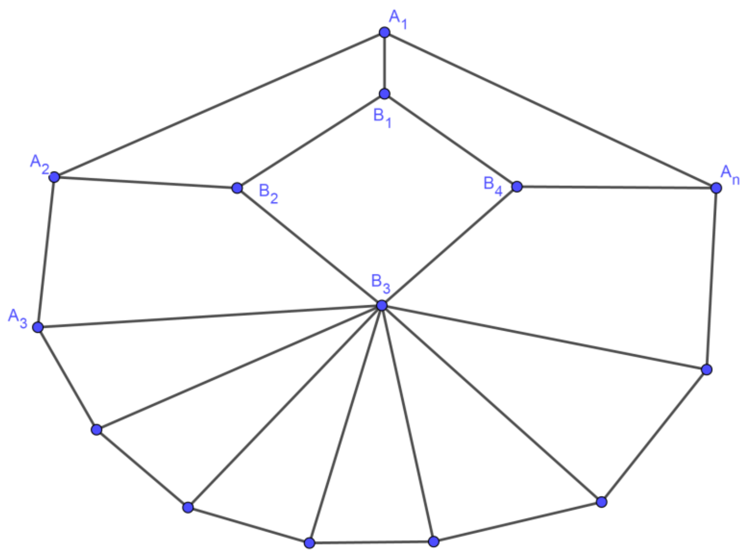
Конфигурации для этих вариантов рассмотрены в приложении, для каждой из них установлено неравенство $S < P$.

Мы проверили, что при $V < 8$ не существует выпуклого многогранника, для которого равны сумма длин рёбер и сумма длин диагоналей.

Таким образом, **8 - наименьшее возможное количество вершин выпуклого многогранника, для которого равны сумма длин рёбер и сумма длин диагоналей.**

В приложении также рассмотрены все возможные конфигурации вариантов 2)-4), для каждой из которых, кроме одной, указанной выше, установлено неравенство $S < P$. Из этого следует, что **при $\boldsymbol{E = 13}$ существует единственный граф, для которого существует многогранник, у которого равны сумма длин рёбер и сумма длин диагоналей.**

Далее рассмотрим, какие характеристики может иметь многогранник, у которого равны сумма длин рёбер и сумма длин диагоналей.



При $n \geq 5$ рассмотрим многогранник с данным графом. В таком многограннике $F = n + 2, E = 2n + 4, V = n + 4$.

Пусть плоскости $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ параллельны, а расстояние между ними равно h_1. Тогда при большом h_1 и неизменных размерах многоугольных граней

$A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2B_3B_4$ каждая из диагоналей и каждое ребро вида A_iB_j имеет длину порядка h_1: A_iB_j=$h_1(1 + o(1))$ при $h_1 \longrightarrow +\infty$. Всего имеем одну диагональ A_1B_3, $n-3$ диагоналей $A_4B_2, \dots, A_nB_2$, $n-3$ диагоналей $A_2B_4, \dots, A_{n-2}B_4$, $n-3$ диагоналей $A_3B_1, \dots, A_{n-1}B_1$ и n рёбер порядка h_1:

$A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_3, \dots, A_{n-1}B_3, A_nB_4$. Так что при $h_1 \longrightarrow +\infty$

$$S = (3n - 8)h_1(1 + o(1)),$$

$$P = nh_1(1 + o(1)),$$

$$\frac{S}{P} = \frac{3n-8}{n}(1 + o(1)) \tag{10}$$

Теперь фиксируем положение точек A_1, B_3, а при сохранении конфигурации все остальные точки пусть стремятся к точке A_1. Тогда основной вклад в асимптотику S вносит длина одной диагонали A_1B_3:

$$S = A_1B_3(1 + o(1)),$$

а основной вклад в асимптотику P вносят длины $(n-1)$ – го ребра, исходящих из вершины B_3:

$$P = (n-1)A_1B_3(1 + o(1)),$$

поэтому

$$\frac{S}{P} = \frac{1}{n-1}(1 + o(1)) \qquad (11)$$

Из (10) следует, что при достаточно большом h_1

$$S > P,$$

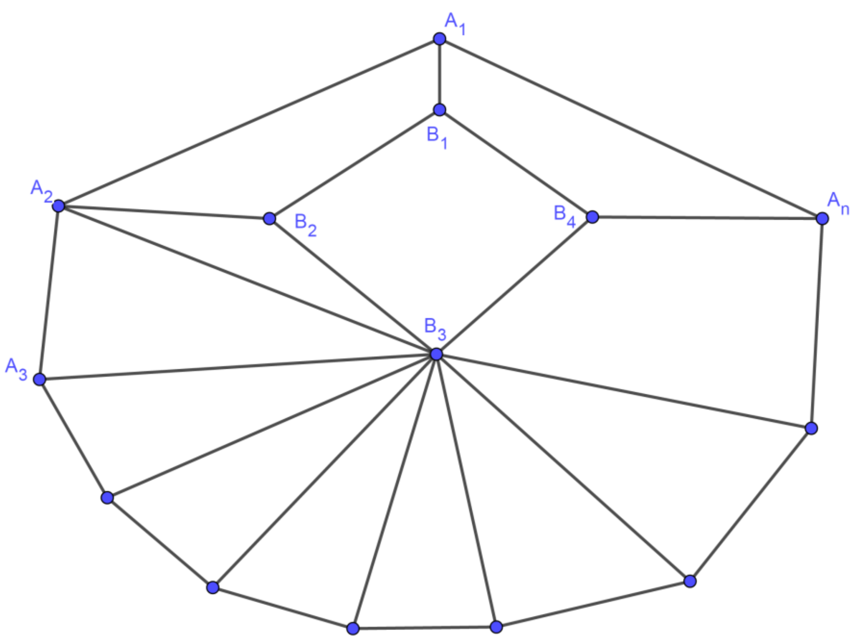
а из (11) следует, что при достаточно близком положении всех вершин, кроме B_3, к вершине A_1

$$S < P.$$

Поэтому при непрерывном изменении положения вершин найдутся такие их значения и соответствующий им многогранник M_n, что $S = P$.

При $n \geq 5$ получаем любые натуральные значения $V \geq 9, F \geq 7$ и любые чётные натуральные значения $E \geq 14$.

Теперь рассмотрим многогранник с таким графом.



В таком многограннике добавляется ребро A_2B_3 (и поэтому $E = 2n + 5$) и одна диагональ A_3B_2, и при $h_1 \longrightarrow +\infty$

$$S = (3n - 7)h_1(1 + o(1)),$$

$$P = (n + 1)h_1(1 + o(1)),$$

$$\frac{S}{P} = \frac{3n - 7}{n + 1}(1 + o(1))$$

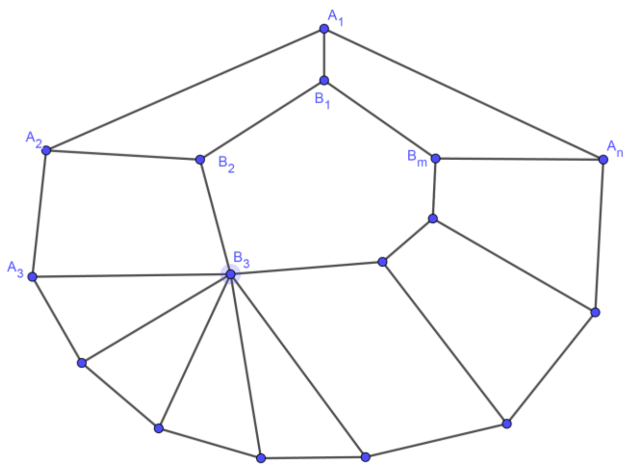
И для другой конфигурации

$$\frac{S}{P} = \frac{1}{n}(1 + o(1))$$

Так что и в этом случае при непрерывном изменении положения вершин найдутся такие их значения и соответствующий им многогранник M_n^1, что $S = P$.

При $n \geq 5$ получаем любые нечётные натуральные значения $E \geq 15$.

Таким образом, **для любого $E \geq 13$ найдётся выпуклый многогранник, для которого равны сумма длин рёбер и сумма длин диагоналей, имеющий E ребер.** Также **для любого $V \geq 8$ найдётся выпуклый многогранник, для которого равны сумма длин рёбер и сумма длин диагоналей, имеющий V вершин, и для любого $F \geq 7$ найдётся выпуклый многогранник, для которого равны сумма длин рёбер и сумма длин диагоналей, имеющий F граней.**



Далее, при $n > m \geq 4$ рассмотрим многогранник с соответствующим графом изображенным на рисунке.

Тогда для двух предельных случаев, таких, которые мы рассматривали для многогранника M_n, имеем

$$\frac{S}{P} = \frac{mn - n - 2m}{n}(1 + o(1))$$

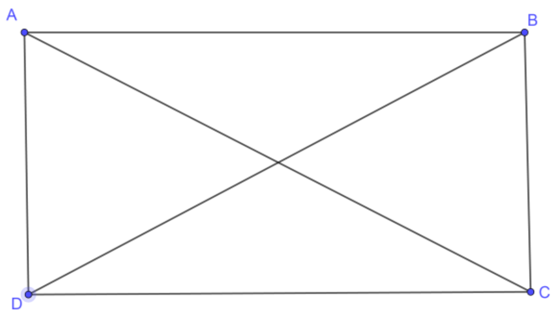
$$\frac{S}{P} = \frac{1}{n-m+3}\big(1 + o(1)\big).$$

Поскольку $\frac{mn-n-2m}{n} > m - 3$, то при любом $\frac{1}{n-m+2} < k < m - 3$ существует многогранник, для которого $\frac{S}{P} = k$. Тогда при $n = 2m \longrightarrow +\infty$ мы сможем получить любое $k \in (0, +\infty)$.

Таким образом, **для любого $\boldsymbol{k} \in (\boldsymbol{0}, +\infty)$ существует выпуклый многогранник, для которого отношение суммы длин диагоналей к сумме длин рёбер равно $\boldsymbol{k}$**

Теперь рассмотрим двумерный случай. Пусть дан выпуклый n-угольник.

$n = 4$:



$$AC < AB + BC,$$

$$AC < AD + DC,$$

$$BD < AB + AD,$$

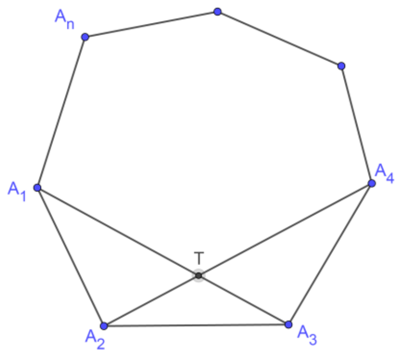
$$BD < BC + CD$$

Складывая, получаем

$$2S = 2(AC + BD) < 2(AB + BC + CD + DA) = 2P$$

$$S < P$$

$n \geq 5$:



Из неравенства треугольника получаем

$$A_1T + A_2T > A_1A_2,$$

$$A_3T + A_4T > A_3A_4.$$

Складывая, получаем

$$A_1A_3 + A_2A_4 \ = A_1T + A_3T + A_2T + A_4T > A_1A_2 + A_3A_4.$$

Аналогично при $i = 2, \dots, n$

$$A_iA_{i+2} + A_{i+1}A_{i+3} > A_iA_{i+1} + A_{i+2}A_{i+3}.$$

Складывая все полученные неравенства, получим

$$2(A_1A_3 + A_2A_4 + \cdots + A_{n-1}A_1 + A_nA_2) > 2P.$$

А поскольку $A_1A_3 + A_2A_4 + \cdots + A_{n-1}A_1 + A_nA_2 \leq S$, то получаем

$$S > P.$$

Таким образом, **не существует выпуклого многоугольника, для которого сумма длин диагоналей равна сумме длин сторон.**

Заметим, что из неравенств $AB + CD < AC + BD$, $AD + CB < AC + BD$ следует, что для четырёхугольника $\frac{S}{P} > \frac{1}{2}$. Рассмотрим такие две крайние конфигурации. Если три вершины стянуть в одну точку, то получим $\frac{S}{P} = \frac{1}{2}$, а если по две соседние вершины стянуть в две разные точки, то в пределе получим $S = P$. Понятно, что непрерывным движением из одной конфигурации в другую, можно получить любое промежуточное значение k.

Таким образом, **для любого $\boldsymbol{k} \in (\frac{1}{2}, \mathbf{1})$ существует выпуклый четырёхугольник, для которого отношение суммы длин диагоналей к сумме длин сторон равно $\boldsymbol{k}$.**

Количество диагоналей многоугольника равно $n(n-3)/2$ и растёт с квадратичной скоростью, потому отношение суммы длин диагоналей к сумме длин сторон выпуклого многоугольника может принимать как угодно большие значения. Другой граничный случай получается, если четыре вершины пятиугольника стянуть в одну точку, тогда получим $S = P$**.** Так что отношение суммы длин диагоналей выпуклого многоугольника к сумме длин сторон может принимать любое значение большее 1.

А в совокупности **для отношения суммы длин диагоналей выпуклого многоугольника к сумме длин сторон получаем значения из множества** $(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}, +\infty)$