ММ251

Ответ: наименьшее число страниц в книге равно 100, и при этом наибольший номер вырванной страницы равен 20.

Решение:

Пусть в книге было n страниц. Поскольку книга содержит целое число листков, а листок состоит из двух страниц, то n чётное.

Сумма натуральных чисел от 1 до n равна $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

При $n \le 98$: $S_n \le S_{98} = 4851$ и сумма номеров оставшихся страниц не могла равняться большему числу 5001.

Поэтому $n \ge 100$.

При $n = 100$: $S_{100} = 5050$ и сумма номеров вырванных страниц равна $5050 - 5001 = 49$.

Заметим, что если на вырванном листке номера страниц $2k+1, 2k+2$, то сумма номеров $4k+3$ в любом случае даёт число $m \equiv 3 \ mod\ 4$.

А количество вырванных листков l должно удовлетворять сравнению $3l \equiv 49 \ mod\ 4$. Таким образом, $l \equiv 3 \ mod\ 4$.

Кроме вырванного листка Л с максимально возможным номером страницы есть ещё, по крайней мере, два вырванных листка с суммой номеров страниц не меньше, чем 1+2=3 и 3+4=7.

Так что сумма номеров страниц на листке Л не больше, чем 49-3-7=39.

А максимально возможный номер вырванной страницы не больше, чем 20.

Такая ситуация возможна, когда в книге было 100 страниц, а вырваны были три листка с номерами страниц 1,2,3,4,19,20.

Рассмотрим вопрос о том, **какие значения может принимать сумма *S* страниц на вырванных листках.**

1) $S \equiv 0 \ mod\ 4$

Количество вырванных листков l должно удовлетворять сравнению $3l \equiv 0 \ mod\ 4$. Таким образом, $l \equiv 0 \ mod\ 4$.

При $l \ge 4$ имеем $S \ge (1+2) + (3+4) + (5+6) + (7+8) = 36$

А при $S = 4h \ge 36$ можем подобрать 4 листка с суммой страниц S:

$$(1+2)+(3+4)+(5+6)+\big((2h-11)+(2h-10)\big)=4h$$

Так что сумма S может принимать любое значение $S=4h, h=0, h\geq 9$ и только такие в указанном множестве.

2) $S\equiv 1\ mod\ 4$

Количество вырванных листков l должно удовлетворять сравнению $3l\equiv 1\ mod\ 4$. Таким образом, $l\equiv 3\ mod\ 4$.

При $l\geq 3$ имеем $S\geq (1+2)+(3+4)+(5+6)=21$

А при $S=4h+1\geq 21$ можем подобрать 3 листка с суммой страниц S:

$$(1+2)+(3+4)+\big((2h-5)+(2h-4)\big)=4h+1$$

Так что сумма S может принимать любое значение $S=4h+1, h\geq 5$ и только такие в указанном множестве.

3) $S\equiv 2\ mod\ 4$

Количество вырванных листков l должно удовлетворять сравнению $3l\equiv 2\ mod\ 4$. Таким образом, $l\equiv 2\ mod\ 4$.

При $l\geq 2$ имеем $S\geq (1+2)+(3+4)=10$

А при $S=4h+2\geq 10$ можем подобрать 2 листка с суммой страниц S:

$$(1+2)+\big((2h-1)+2h\big)=4h+2$$

Так что сумма S может принимать любое значение $S=4h+2,\ h\geq 2$ и только такие в указанном множестве.

4) $S\equiv 3\ mod\ 4$

Количество вырванных листков l должно удовлетворять сравнению $3l\equiv 3\ mod\ 4$. Таким образом, $l\equiv 1\ mod\ 4$.

При $l\geq 1$ имеем $S\geq (1+2)=3$

А при $S=4h+3\geq 3$ можем подобрать листок с суммой страниц S:

$$(2h+1)+(2h+2)=4h+3$$

Так что сумма S может принимать любое значение $S=4h+3,\ h\geq 0$.

Получается, что сумма S страниц на вырванных листках может принимать любое значение из множества $T=\{4h, h=0, h\geq 9\}\cup\{4h+1, h\geq 5\}\cup\{4h+2,\ h\geq 2\}\cup\{4h+3,\ h\geq 0\}$ и только эти.

Ясно, что при этом максимально возможный номер вырванной страницы определяется формулой

$$m = \begin{cases} \frac{S-20}{2}, S \equiv 0 \ mod \ 4, S > 0 \\ \frac{S-9}{2}, S \equiv 1 \ mod \ 4 \\ \frac{S-2}{2}, S \equiv 2 \ mod \ 4 \\ \frac{S+1}{2}, S \equiv 3 \ mod \ 4 \end{cases}$$