**ММ252** *(5 баллов)*

*Решение:* Рассмотрим число $1408 = 2^7 \cdot 11$

Для него есть такие представления

$$1408 = 1 \cdot 32 \cdot 44 = 2 \cdot 64 \cdot 11$$

и при этом

$$1 + 32 + 44 = 2 + 64 + 11 = 77,$$

а также

$$1408 = 2 \cdot 32 \cdot 22 = 4 \cdot 8 \cdot 44$$

и при этом

$$2 + 32 + 22 = 4 + 8 + 44 = 56$$

Умножим каждый множитель на $2^t, t \in N$. Получаются такие представления для числа $2^{7+3t} \cdot 11$:

$$2^{7+3t} \cdot 11 = 2^t \cdot 2^{t+5} \cdot (2^{t+2} \cdot 11) = 2^{t+1} \cdot 2^{t+6} \cdot (2^t \cdot 11)$$

$$2^t + 2^{t+5} + (2^{t+2} \cdot 11) = 2^{t+1} + 2^{t+6} + (2^t \cdot 11) = 77 \cdot 2^t$$

$$2^{7+3t} \cdot 11 = 2^{t+1} \cdot 2^{t+5} \cdot (2^{t+1} \cdot 11) = 2^{t+2} \cdot 2^{t+3} \cdot (2^{t+2} \cdot 11)$$

$$2^{t+1} + 2^{t+5} + (2^{t+1} \cdot 11) = 2^{t+2} + 2^{t+3} + (2^{t+2} \cdot 11) = 56 \cdot 2^t$$

Таким образом, найдено бесконечное множество чисел

$$2^{7+3t} \cdot 11, t \in N \cup \{0\},$$

для которых найдутся два указанные представления.

Рассмотрим вопрос существования таких представлений для чисел вида $p^k$.

Пусть

$$p^x + p^y + p^z = p^a + p^b + p^c, x \le y \le z, a \le b \le c \tag{1}$$

и

$$x + y + z = a + b + c. \tag{2}$$

Если $x = a$, то из равенств $p^y + p^z = p^b + p^c, p^y \cdot p^z = p^b \cdot p^c$ с помощью теоремы Виета приходим к равенствам $p^y = p^b, p^z = p^c$ и, значит, тройки чисел разбиений совпадают.

Пусть $x < a$ и $x < y$. Тогда из (1) следует

$1 + p^{y-x} + p^{z-x} = p^{a-x} + p^{b-x} + p^{c-x},$

что невозможно, так как правая часть делится на $p$, а левая часть - нет.

Остается случай $x < a$ и $x = y$. Тогда $z > x$, так как в противном случае $1 + p^{y-x} + p^{z-x} = 3$, а $p^{a-x} + p^{b-x} + p^{c-x} \geq p + p + p = 3p > 3$ – противоречие.

Тогда получаем равенство $1 + 1 + p^{z-x} = p^{a-x} + p^{b-x} + p^{c-x}$, в котором правая часть делится на $p$, а чтобы левая часть делилась на $p$, необходимо $p = 2$

Получаем равенство $2 + 2^{z-x} = 2^{a-x} + 2^{b-x} + 2^{c-x}$
и такое равенство $1 + 2^{z-x-1} = 2^{a-x-1} + 2^{b-x-1} + 2^{c-x-1}$.
Правая часть не меньше 3, поэтому $2^{z-x-1} \geq 2$ и слева, а, значит, и справа нечетное число.
Если $2^{a-x-1} = 2^{b-x-1} = 2^{c-x-1} = 1$ , тогда $2^{z-x-1} = 2$, и затем

$$z = x + 2, a = b = c = x + 1$$

$$x + y + z = x + x + x + 2 = 3x + 2$$

$$a + b + c = 3x + 3$$

$$x + y + z \neq a + b + c$$

И поэтому условие (2) не выполняется.

Пусть справа только одно слагаемое нечетно, тогда $2^{a-x-1} = 1$, и

$$2^{z-x-1} = 2^{b-x-1} + 2^{c-x-1}$$

Это возможно только если $b - x - 1 = c - x - 1 = r \geq 1, z - x - 1 = r + 1$.
И окончательно $z = x + r + 2, a = x + 1, b = c = x + r + 1$

$$x + y + z = x + x + x + r + 2 = 3x + r + 2$$

$$a + b + c = x + 1 + x + r + 1 + x + r + 1 = 3x + 2r + 3$$

$$x + y + z \neq a + b + c$$

И поэтому условие (2) в этом случае также не выполняется.

Таким образом, для чисел вида $p^k$ не существует представления в виде произведения трёх натуральных множителей двумя способами с одинаковой суммой этих множителей.