ММ 253 (5 баллов)

Ответ: Объем призмы может принимать два значения $\frac{162\sqrt{3}}{\sqrt{3631}}$ и $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Решение:

1) $AB \leq BB_1$

В этом случае плоскость, проходящая через середину I отрезка AB_1, пересекает грань ABB_1A_1 по отрезку KL так, что точки K, L принадлежат соответственно ребрам AA_1, BB_1, а ребро CC_1 - в точке J

При этом I - середина отрезка KL, $KL \perp AB_1$, а отрезок JI перпендикулярен грани ABB_1A_1 и поэтому параллелен высоте CD треугольника ABC, значит, $IJ = CD = AB\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Пусть $\angle AB_1B = \alpha$

$$AB_1 = \frac{AB}{sin\alpha} = \frac{2}{sin\alpha}, IB_1 = \frac{AB_1}{2} = \frac{1}{sin\alpha}, LI = IB_1 tg\alpha = \frac{tg\alpha}{sin\alpha} = \frac{1}{cos\alpha}$$

$$S_{LKJ} = \frac{KL \cdot IJ}{2} = \frac{2LI \cdot IJ}{2} = LI \cdot IJ = \frac{\sqrt{3}}{cos\alpha}$$

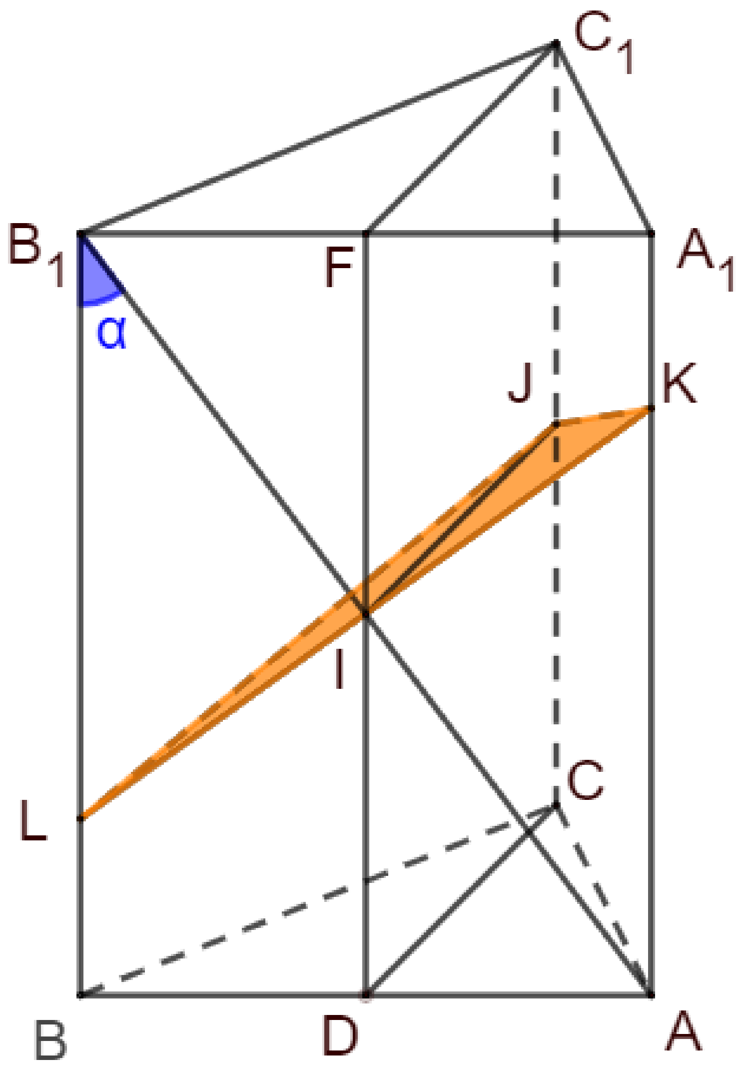
По условию $S_{LKJ} = \frac{28\sqrt{39}}{81}$

Решаем уравнение $\frac{\sqrt{3}}{cos\alpha} = \frac{28\sqrt{39}}{81}$,

находим $cos\alpha = \frac{81}{28\sqrt{13}}$

$$V = S_{ABC} \cdot BB_1, S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}, BB_1 = ABctg\alpha = 2ctg\alpha$$

$$V = 2\sqrt{3}ctg\alpha, ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{\sqrt{1-cos^2\alpha}} = \frac{\frac{81}{28\sqrt{13}}}{\sqrt{1-\left(\frac{81}{28\sqrt{13}}\right)^2}} = \frac{81}{\sqrt{3631}}. V = \frac{162\sqrt{3}}{\sqrt{3631}} = 4{,}65653\ldots$$



2) $AB > BB_1$

В этом случае плоскость β, проходящая через середину I отрезка AB_1 и перпендикулярная отрезку AB_1, пересекает грань ABB_1A_1 по отрезку EG так, что точки E, G принадлежат соответственно ребрам A_1B_1, AB, а ребро CC_1 - в точке J

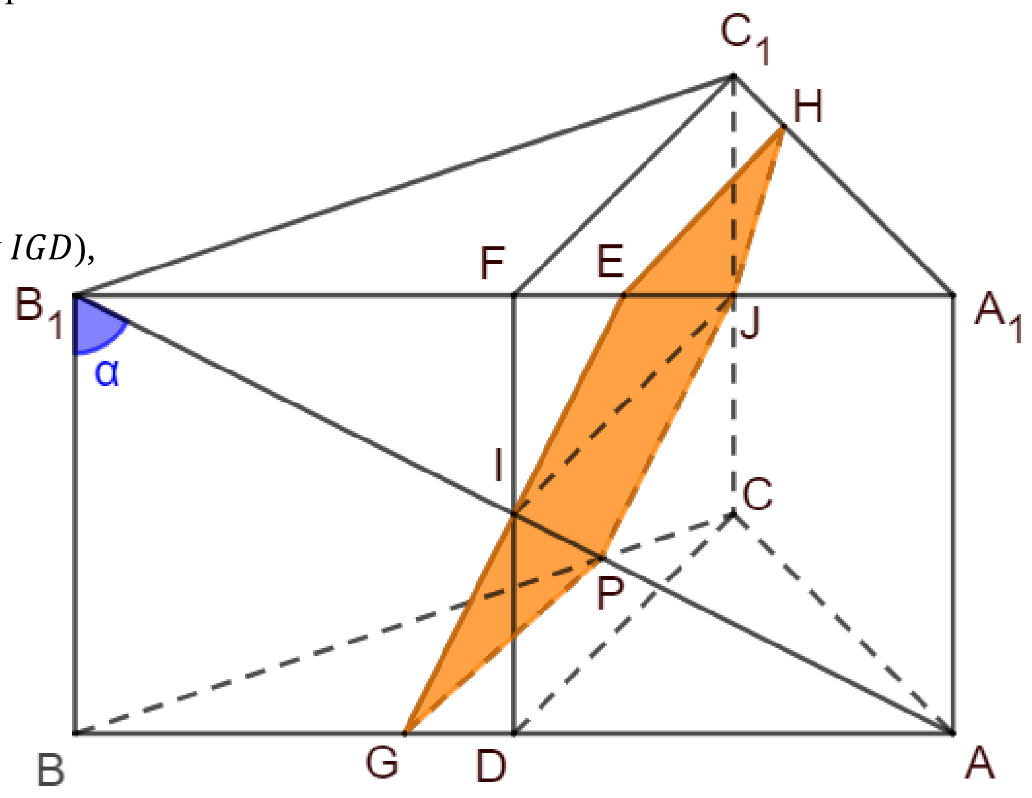
При этом I - середина отрезка EG, EG $\perp AB_1$, а отрезок JI перпендикулярен грани ABB_1A_1 и поэтому параллелен высоте CD треугольника ABC, значит, $IJ = CD = AB\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Получается, прямая CD параллельна плоскости β, а значит и параллельна прямой GP пересечения плоскостей β и ABC (здесь P – точка пересечения плоскости β и отрезка BC)

И если по-прежнему $\angle AB_1B = \alpha$

$$AB_1 = \frac{AB}{sin\alpha} = \frac{2}{sin\alpha}, IB_1 = \frac{AB_1}{2} = \frac{1}{sin\alpha}, EI = IB_1ctg\alpha = \frac{ctg\alpha}{sin\alpha}$$

Поскольку трапеция $GPCD$ является проекцией трапеции $GPJI$ на плоскость ABC, а угол между плоскостями, содержащими эти трапеции равен α(равен линейному углу IGD), то



$$S_{GPJI} = \frac{S_{GPCD}}{cos\alpha}$$

$$GD = IGcos\alpha = EIcos\alpha = \frac{ctg\alpha}{sin\alpha}cos\alpha = ctg^2\alpha$$

$$BG = BD - GD = 1 - ctg^2\alpha$$

$$GP = BGtg\frac{\pi}{3} = (1 - ctg^2\alpha)\sqrt{3}$$

$$S_{GPCD} = \frac{GP + CD}{2}GD = \frac{(1 - ctg^2\alpha)\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2}ctg^2\alpha$$

$$S_{GPJI} = \frac{(1-ctg^2\alpha)\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2cos\alpha}ctg^2\alpha$$

В силу соображений симметрии пятиугольник $EHJPG$ состоит из двух равных трапеций $GPJI$ и $EHJI$

Поэтому $S_{EHJPG} = 2S_{GPJI} = \frac{(1-ctg^2\alpha)\sqrt{3}+\sqrt{3}}{cos\alpha}ctg^2\alpha = \frac{(2-ctg^2\alpha)\sqrt{3}}{cos\alpha}ctg^2\alpha$

Для исследования функции $S(\alpha) = \frac{(2-ctg^2\alpha\,)\sqrt{3}}{cos\alpha} ctg^2\alpha$ на интервале $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

Представим её в виде $S(\alpha) = (2 - ctg^2\alpha\,)\sqrt{3} ctg\alpha \sqrt{1 + ctg^2\alpha}$

Рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt{3}t(2 - t^2)\sqrt{1 + t^2}$ на интервале (0,1).

Вычисляем её производную

$$f'(t) = \frac{\sqrt{3}(2 + t^2 - 4t^4)}{\sqrt{1 + t^2}}$$

Находим единственную стационарную точку $t_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{8}}$ и тогда $f'(t) > 0$

при $t \in (0, t_0)$, а $f'(t) < 0$ при $t \in (t_0, 1)$. Потому t_0 - точка максимума.

Получается, что функция $S(\alpha)$ имеет максимум при $\alpha = arcctg\sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{8}}$,

при этом функция $S(\alpha)$ возрастает на промежутке $(\frac{\pi}{4}, arcctg\sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{8}}]$

и убывает на промежутке $[arcctg\sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{8}}, \frac{\pi}{2})$

Объединив два случая, получим функцию площади сечения призмы от угла α:

$$S(\alpha) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{cos\alpha}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{4}] \\ \frac{(2-ctg^2\alpha\,)\sqrt{3}}{cos\alpha} ctg^2\alpha, \alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Эта функция возрастает на промежутке $\left(0, arcctg\sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{8}}\right]$ и убывает на промежутке $[arcctg\sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{8}}, \frac{\pi}{2})$

При этом $S(+0) = \sqrt{3}, S\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 0, S\left(arcctg\sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{8}}\right) = \frac{3(5\sqrt{3}-\sqrt{11})\sqrt{1+\sqrt{33}}\sqrt{9+\sqrt{33}}}{64} = 2.49787\ldots$

Заметим, что при $ctg\alpha = \frac{2}{3}, cos\alpha = \frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$

и $\frac{(2-ctg^2\alpha\,)\sqrt{3}}{cos\alpha} ctg^2\alpha = \frac{\left(2-\frac{4}{9}\right)\sqrt{3}}{\frac{6}{\sqrt{13}}}\frac{4}{9} = \frac{28\sqrt{39}}{81}$.

Поэтому при $\alpha = arcctg\,\frac{2}{3} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $S_{EHJPG} = \frac{28\sqrt{39}}{81}$

Тогда

$V = 2\sqrt{3}ctg\alpha = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2{,}30940\ldots$

Поскольку функция $S(\alpha)$ имеет два промежутка монотонности, то существует не более двух значений аргумента, в которых она может принимать одинаковые значения. Таким образом, других значений, кроме найденных, нет.

Анализ. С учетом проведенного анализа функции $S(\alpha)$ и очевидным образом обобщая результат на случай длины стороны основания призмы, равной a, получаем такой результат.

$$S(\alpha) = \begin{cases} \frac{a^2\sqrt{3}}{4cos\alpha}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{4}] \\ \frac{a^2(2-ctg^2\alpha\,)\sqrt{3}}{4cos\alpha} ctg^2\alpha, \alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

При $S \in (0, \frac{a^2\sqrt{3}}{4}] \cup \left\{\frac{3a^2(5\sqrt{3}-\sqrt{11})\sqrt{1+\sqrt{33}}\sqrt{9+\sqrt{33}}}{256}\right\}$ существует ровно одна призма с заданным значением площади соответствующего сечения.

При $S \in (\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \frac{3a^2\left(5\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)\sqrt{1+\sqrt{33}}\sqrt{9+\sqrt{33}}}{256})$ существует ровно две призмы с заданным значением площади соответствующего сечения.

При $S \in (\frac{3a^2\left(5\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)\sqrt{1+\sqrt{33}}\sqrt{9+\sqrt{33}}}{256}, +\infty)$ не существует призмы с заданным значением площади соответствующего сечения.

В случае правильной четырёхугольной призмы со стороной основания длины a получаем такую функцию площади сечения, перпендикулярного диагонали бокового ребра и проходящего через его середину

$$S(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{a^2}{cos\alpha}, \alpha \ \in (0, \dfrac{\pi}{4}] \\ \dfrac{a^2 cos\alpha}{sin^2\alpha}, \alpha \ \in (\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

которая также, как и в случае правильной треугольной призмы, имеет два промежутка монотонности и одну точку максимума, но точку максимума при $\alpha = \frac{\pi}{4}$