MM 256 (5 баллов)

Ответ: $557940830126698960967415390 =$

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71$

Решение: Функция $y(t) = nt^2 + t, n \in N$ на промежутке $[0,1)$ монотонно возрастает (так как $y' = 2nt + 1 > 0, t \in [0,1))$ и принимает значения из промежутка $[0, n+1)$, поэтому каждое целое значение $0,1, \dots, n$ принимает по одному разу. Следовательно, уравнение $n\{x\}^2 + \{x\} = \lfloor x \rfloor$ имеет ровно $(n+1)$ действительное решение.

Пусть $\lfloor x \rfloor = m = 0,1, \dots, n$, тогда $\{x\} = \frac{-1+\sqrt{1+4mn}}{2n}$, и если $\{x\}$ – рациональное число, то рациональным является и число $2n\{x\} + 1 = \sqrt{1+4mn}$. Значит, $1 + 4mn$ – квадрат рационального числа, но $1 + 4mn$ - натуральное число. Таким образом, $1 + 4mn = k^2$ - квадрат некоторого натурального числа k. Так как $m \geq 0$, то $k \geq 1$, и так как $m \leq n$, то $k^2 \leq 1 + 4n^2 \Rightarrow k \leq 2n - 1$ (если $k = 2n$, то $m = \frac{4n^2-1}{4n} = n - \frac{1}{4n}$ не является целым числом). Таким образом, $1 \leq k \leq 2n - 1$.

Рассмотрим уравнение

$$(k-1)(k+1) = 4mn \qquad (1)$$

1) $n = 1$. Тогда при $m = 0$ получаем $k = 1, \{x\} = 0$ и рациональное решение $x = 0$.

При $m = 1$ $\{x\} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ – иррациональное, и понятно, получившийся корень $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ также иррационален.

Всего получается ровно одно рациональное решение.

2) $n \geq 2$. Из уравнения (1) следует $(k-1)(k+1) \vdots 4$.

Числа $(k-1), (k+1)$ имеют одинаковую четность и в произведении дают четное число, значит, являются одновременно четными числами. Таким образом, $\frac{k-1}{2}\frac{k+1}{2} = mn$ и потому $\frac{k-1}{2}\frac{k+1}{2} \vdots n$. Предположим, $\frac{k-1}{2} \vdots d_1, \frac{k+1}{2} \vdots d_2$, и

$$n = d_1 d_2, d_i \in N \qquad (2)$$

Тогда $\frac{k-1}{2} = d_1 s_1, \frac{k+1}{2} = d_2 s_2, s_i \in N$. И если d_1 и d_2 имеют наибольший общий делитель $g \in N$, то $d_1 = gr_1, d_2 = gr_2, r_i \in N \Rightarrow 1 = \frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} = d_2 s_2 - d_1 s_1 = g(r_2 s_2 - r_1 s_1) \Rightarrow g|1 \Rightarrow g = 1$. Так что числа d_1, d_2 взаимно просты. Кроме того, так как $\frac{k+1}{2} \leq n$, то $d_2 s_2 \leq n = d_1 d_2 \Longrightarrow s_2 \leq d_1$.

Далее, при заданных взаимно простых d_1 и d_2 рассмотрим диофантовое равнение

$$d_2 s_2 - d_1 s_1 = 1. \qquad (3)$$

относительно целых чисел в диапазоне $s_2 = 1, \dots, d_1, s_1 = 0, \dots, d_2 - 1$

Числа $d_2, 2d_2, \dots, d_1 d_2$ имеют различные остатки при делении d_1 (действительно, если для некоторых натуральных $v, w: 1 \le v, w \le d_1$

$vd_2 \equiv wd_2 \; mod \; d_1 \Rightarrow (vd_2 - wd_2) \equiv 0 \; mod \; d_1 \Rightarrow$ (так как НОД$(d_1, d_2) = 1) \Rightarrow (v - w) \equiv 0 \; mod \; d_1 \Rightarrow v = w$). И всего таких остатков ровно d_1. Значит, существует ровно одно значение $v: 1 \le v \le d_1, vd_2 \equiv 1 \; mod \; d_1$ и соответственно ровно одно решение $s_2 = v,\ s_1 = \frac{vd_2 - 1}{d_1} \in N_0$ уравнения (3).

При этом $k = 2d_2 v - 1, \{x\} = \frac{-1+k}{2n} = \frac{d_2 v - 1}{d_1 d_2}, \lfloor x \rfloor = \frac{\frac{k-1}{2}\frac{k+1}{2}}{n} = \frac{d_1 s_1 d_2 s_2}{d_1 d_2} = s_1 s_2.$

Поэтому для данного представления (2) существует ровно одно значение $k = 2d_2 v - 1$, дающее рациональное решение $x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = s_1 s_2 + \frac{d_2 v - 1}{d_1 d_2}$ уравнения (1) при некотором значении $m = 0,1, \dots, n$.

Пусть в разложении на простые множители числа n участвуют N различных простых чисел

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_N^{\alpha_N}$$

Число $d_1 = p_{k_1}^{\alpha_{k_1}} \dots p_{k_t}^{\alpha_{k_t}}$ в представлении (2) однозначно определяется подмножеством индексов $\{k_1, \dots, k_t\} \subset \{1, \dots, N\}$. Всего есть 2^N подмножеств множества, состоящего из N элементов. Таким образом, существует ровно 2^N различных представлений (2) числа n. И каждому из них соответствует ровно одно значение k, дающее решение уравнения (1) при некотором значении $m = 0,1, \dots, n$, и значит, ровно одно рациональное решение исходного уравнения.

Всего получается ровно 2^N рациональных решений.

Понятно, что наименьшее число, имеющее в разложении на простые множители числа n ровно N различных простых чисел, это произведение первых N простых чисел, то есть праймориал

$$p_N\# = p_1 \dots p_N$$

Если необходимо найти наименьшее n такое, что уравнение $n\{x\}^2 + \{x\} = \lfloor x \rfloor$ не менее, чем M рациональных решений, то нужно взять $p_N\#$

при $N = \lceil log_2 M \rceil$.

$$n = p_{[log_2 M]}\#$$

В нашем случае

$M = 1000000, N = [log_2 1000000] = 20, p_{20}\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 =$

$= 557940830126698960967415390$.

Поставим аналогичный вопрос для уравнения

$\boldsymbol{n\{x\}^2 + h\{x\} = \lfloor x \rfloor}$, **где** $\boldsymbol{h = p}$ **– простое.**

Анализ показывает, что количество рациональных решений равно

1) $\boldsymbol{2^N, n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_N^{\alpha_N}, p_i \neq p}$
2) $\boldsymbol{2^N, n = p p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_N^{\alpha_N}, p_i \neq p}$
3) $\boldsymbol{p 2^N, n = p^2 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_N^{\alpha_N}, p_i \neq p}$
4) $\boldsymbol{p 2^{N+1}, n = p^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_N^{\alpha_N}, p_i \neq p, \alpha \geq 3}$

Заметим, что функция $y(t) = nt^2 + ht, n \in N$ на промежутке $[0,1)$ монотонно возрастает (так как $y' = 2nt + h > 0, t \in [0,1)$) и принимает значения из промежутка $[0, n + h)$, поэтому каждое целое значение $0,1, \dots, n + h - 1$ принимает по одному разу. Следовательно, уравнение $n\{x\}^2 + h\{x\} = \lfloor x \rfloor$ имеет ровно $(n + h - 1)$ действительное решение.

Пусть $\lfloor x \rfloor = m = 0,1, \dots, n + h - 1$, тогда $\{x\} = \frac{-h + \sqrt{h^2 + 4mn}}{2n}$, и если $\{x\}$ – рациональное число, то рациональным является и число $2n\{x\} + h = \sqrt{h^2 + 4mn}$. Значит, $h^2 + 4mn$ – квадрат рационального числа, но $h^2 + 4mn$ - натуральное число. Таким образом, $h^2 + 4mn = k^2$ - квадрат некоторого натурального числа k. Так как $m \geq 0$, то $k \geq 1$, и так как $m \leq n + h - 1$, то $k^2 \leq h^2 + 4n(n + h - 1) \Rightarrow k \leq \sqrt{h^2 + 4n(n + h - 1)}$.

Рассмотрим уравнение

$$(k - h)(k + h) = 4mn \quad (4)$$

Из уравнения (4) следует $(k - h)(k + h) \vdots 4$.

Числа $(k - h), (k + h)$ имеют одинаковую четность и в произведении дают четное число, значит, являются одновременно четными числами. Таким образом, $\frac{k-h}{2}\frac{k+h}{2} = mn$ и потому $\frac{k-h}{2}\frac{k+h}{2} \vdots n$. Предположим, $\frac{k-h}{2} \vdots d_1$, $\frac{k+h}{2} \vdots d_2$, и

$$n = d_1 d_2, d_i \in N \quad (5)$$

Тогда $\frac{k-h}{2} = d_1 s_1, \frac{k+h}{2} = d_2 s_2, s_i \in N$. И если d_1 и d_2 имеют наибольший общий делитель $g \in N$, то $d_1 = g r_1, d_2 = g r_2, r_i \in N \Rightarrow h = \frac{k+h}{2} - \frac{k-h}{2} = d_2 s_2 - d_1 s_1 = g(r_2 s_2 - r_1 s_1) \Rightarrow g|h \Rightarrow g = 1, h$.

Рассмотрим, к примеру, (остальные рассматриваются аналогично) случай $n \not\equiv 0 \, mod \, h$, тогда $g = 1$ и d_1, d_2 взаимно просты, и каждое d_1, d_2 взаимно просто с h.

Далее, при заданных взаимно простых d_1 и d_2 рассмотрим диофантовое равнение

$$d_2 s_2 - d_1 s_1 = h. \quad (6)$$

Существует ровно одно значение $u: 1 \le u \le d_2, u d_1 \equiv -h \, mod \, d_2$ и ему соответствует решение $s_1 = u$, $s_2 = \frac{u d_1 + h}{d_2} \in N$ уравнения (6). А общее решение дается формулой $s_1 = u + d_2 t, s_2 = \frac{u d_1 + h}{d_2} + d_1 t, t \in Z$. Учитывая, что $t < 0 \Rightarrow s_1 < 0$ и $t > 0 \Rightarrow m = s_1 s_2 > n + h - 1$, получаем единственное рациональное решение, соответствующее представлению (6) . А всего 2^N рациональных решений.

В этом случае для определения минимального числа n дающего не менее M рациональных решений необходимо сравнивать две шкалы 2^N и $p2^N$ и соответствующие им форматы чисел.

Например, при $p = 3$ получаем

N	2^N	M	$p2^N$	M
0	1	1	3	9
1	2	2	6	18
2	4	10	12	54
3	8	70	24	270
4	16	770	48	1890