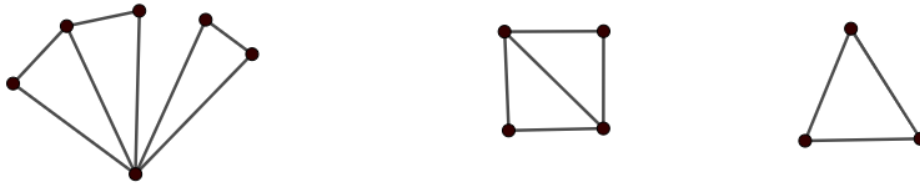


ММ 257 (5 баллов)

Ответ: Да, Вася сможет однозначно определить структуру графа Г.



При этом все студенты, кроме Тани сказали правду.

Решение: Обозначим через v, e, k — количества вершин, ребер, компонент связности графа, а через $\alpha_i, i = 1, \dots, v$ — степени вершин.

Если бы Фаина ошиблась, то и кто-то из девушек Зина, Лина, Нина также ошиблась. Но тогда, как минимум, двое сказали неправду. Это исключается. Значит, Фаина сказала правду, а также Зина, Лина и Нина сказали правду. Так что $v \leq 13, \alpha_i \neq 1, i = 1, \dots, v$ и для одной из вершин $\alpha_i \geq \alpha_j + 2, j \neq i$. Заметим, что граф не может быть пустым, так как в этом случае Аня и Таня ошибались.

Предположим, есть изолированные вершины. В компоненте, состоящей из изолированной вершины, цикла, естественно, нет. Тогда циклы не во всех компонентах, и Ваня сказал неправду. Все остальные сказали правду. Из слов Дани следует, что изолированная вершина только одна (в противном случае, две изолированные вершины являются изоморфными компонентами). Всего три компоненты связности (правдиво отметила Аня). Висячих вершин нет (Лина сказала правду). Значит, для одной вершины степень равна нулю, а для остальных не меньше двух. У одной вершины степень равна 3 (информация Тани), значит, есть и другие вершины со степенями не менее двух, тогда степень 3 не является максимальной (было бы противоречие с информацией Нины), и у одной из вершин степень не меньше 5 (информация Нины):

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 3, \alpha_3 \geq 5, \alpha_i \geq 2, i = 4, \dots, v$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^v \alpha_i = 2e,$$

и $e = v + k$ (информация Сани), и $k = 3$ (информация Ани), то

$$\sum_{i=1}^v \alpha_i = 2v + 6,$$

$$\sum_{i=3}^v \alpha_i = 2v + 3$$

$$(\alpha_3 - 5) + \sum_{i=4}^v (\alpha_i - 2) = 2v + 3 - 5 - 2(v - 3) = 4$$

Возможные варианты:

- 1) $\alpha_3 = 9, \alpha_i = 2, i = 4, \dots, v$
- 2) $\alpha_3 = 8, \alpha_4 = 3, \alpha_i = 2, i = 5, \dots, v$
- 3) $\alpha_3 = 7, \alpha_4 = 3, \alpha_5 = 3, \alpha_i = 2, i = 6, \dots, v$
- 4) $\alpha_3 = 7, \alpha_4 = 4, \alpha_i = 2, i = 5, \dots, v$
- 5) $\alpha_3 = 6, \alpha_4 = 3, \alpha_5 = 3, \alpha_6 = 3, \alpha_i = 2, i = 7, \dots, v$
- 6) $\alpha_3 = 6, \alpha_4 = 4, \alpha_5 = 3, \alpha_i = 2, i = 6, \dots, v$
- 7) $\alpha_3 = 6, \alpha_4 = 5, \alpha_i = 2, i = 5, \dots, v$
- 8) $\alpha_3 = 5, \alpha_4 = 3, \alpha_5 = 3, \alpha_6 = 3, \alpha_7 = 3, \alpha_i = 2, i = 8, \dots, v$
- 9) $\alpha_3 = 5, \alpha_4 = 4, \alpha_5 = 3, \alpha_6 = 3, \alpha_i = 2, i = 7, \dots, v$
- 10) $\alpha_3 = 5, \alpha_4 = 5, \alpha_5 = 3, \alpha_i = 2, i = 6, \dots, v$
- 11) $\alpha_3 = 5, \alpha_4 = 4, \alpha_5 = 4, \alpha_i = 2, i = 6, \dots, v$
- 12) $\alpha_3 = 5, \alpha_4 = 6, \alpha_i = 2, i = 5, \dots, v$

В вариантах 2), 3), 5), 6), 8), 9), 10) возникают дополнительные сверх одной вершины степени 3, и поэтому не выполнено условие Тани.

В вариантах 7), 9), 10), 11), 12) не выполнено условие Нины.

В варианте 1) из условия $\alpha_3 = 9$ следует, что в одной из компонент не менее 10 вершин, а в другой, с учетом фразы Зиной - не более двух (и тогда образуются висячие вершины). Невозможно.

В варианте 4) из условия $\alpha_3 = 7$ следует, что в одной из компонент не менее 8 вершин: у одной степень не менее 7, а у остальных не менее, чем 3 у одной и 2 у остальных, тогда всего в этой компоненте ребер не меньше, чем $\frac{7+3+6 \cdot 2}{2} = 11$, тогда всего не менее 22 ребра (следует из информации Мани), и из условия Сани следует, с учетом $k = 3$, что $v \geq 19$ – противоречие с фразой Зиной.

Таким образом, изолированных вершин нет. И поэтому $\alpha_i \geq 2, i = 1, \dots, v$. Значит, в графе не менее трёх вершин, и поэтому максимальная степень α_1 вершины не меньше 4 (следует из фразы Нины).

i) $\alpha_1 = 4$. Тогда все остальные вершины имеют степень 2 (следует из фразы Нины) $\alpha_1 = 4, \alpha_i = 2, i = 2, \dots, v$. Тогда $e = \frac{\sum_{i=1}^v \alpha_i}{2} = \frac{4+(v-1)2}{2} = v + 1$. И получается, что либо Аня либо Саня ошиблась (ошибся). А все остальные сказали правду, в том числе и Таня. Но это не так, поскольку вершины со степенью 3 в графе нет.

ii) $\alpha_1 = 5$. Поскольку сумма всех степеней вершин четна, то должны быть ещё вершины с нечетной степенью (остается один вариант $\alpha_i = 3$) в нечетном количестве.

Пусть $\alpha_i = 3, i = 2, \dots, s, \alpha_i = 2, i = s + 1, \dots, v$.

Тогда $2e = \sum_{i=1}^v \alpha_i = 5 + 3(s - 1) + 2(v - s) = 2v + s + 2, e = v + 1 + \frac{s}{2}$.

Если Аня и Таня сказали правду, то $k = 3, s = 2$ и потому $e = v + 2$, что противоречит фразе Сани.

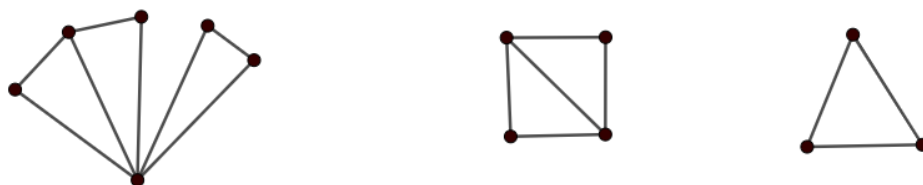
Значит, одновременно Аня, Таня и Саня не могли сказать правду. И кто-то из них ошибся, а остальные сказали правду.

Поскольку в компоненте с вершиной со степенью $\alpha_1 = 5$ не менее 6 вершин, и сумма степеней вершин четна, то с учетом оценки $\alpha_i \geq 2$ для остальных вершин компоненты получаем, что в этой компоненте ребер не меньше, чем $\lceil (5 + 5 \cdot 2)/2 \rceil = 8$, тогда всего не менее 16 ребер (следует из информации Мани).

Предположим, что ошиблась Аня: $k \neq 3$. Тогда прав Саня, и получаем $k = e - v \geq 16 - 13 = 3 \Rightarrow k \geq 4$. Так как $\alpha_i \geq 2$, то в каждой компоненте не менее, чем по три вершины, и в одной не менее 6, всего не менее 15 – противоречие с информацией Зины. Невозможно.

Предположим, что ошибся Саня. Тогда $k = 3$. Имеем компоненту с не менее, чем 6-ю вершинами, а в остальных двух компонентах не менее, чем три и четыре вершины (так как компоненты с тремя вершинами и со степенями по два – циклы, и потому изоморфны - в этом случае было бы противоречие с информацией Дани). В сумме как раз 13. Так что имеем цикл с тремя вершинами, цикл с четырьмя вершинами (в других вариантах возникает не менее двух вершин со степенями 3 – противоречие с информацией Тани). И в этих компонентах 7 ребер. А в третьей компоненте 8 ребер – противоречие с информацией Мани ($8 \neq \frac{7+8}{2}$). Невозможно.

Предположим, что ошиблась Таня. Тогда $k = 3$, и с учетом равенства $e = v + k$ (информация Сани) и неравенств $e \geq 16, v \leq 13$, получаем $e = 16, v = 13$. Далее, в компоненте с вершиной со степенью $\alpha_1 = 5$ всего 8 ребер (из информации Мани - не больше 8, а ранее показали, что не меньше 8) и поэтому ровно 6 вершин, и ровно одна – со степенью 3, а остальные четыре – со степенью 2 – причем такая компонента восстанавливается однозначно с точностью до изоморфизма. В двух других компонентах в сумме 7 вершин и 8 ребер. Значит, одна компонента – цикл длины три, а другая – граф с четырьмя вершинами и пятью ребрами (это граф, получающийся из полного графа стиранием одного ребра). Для такого графа утверждения всех студентов, за исключением Тани, - правдивы.



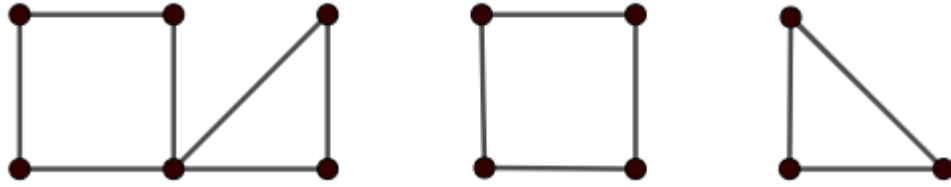
iii) $\alpha_1 \geq 6$. Тогда в одной компоненте не менее 7 вершин. И если Аня сказала правду, то в двух других компонентах (с учетом фразы Зины) не более 6 вершин. И как как степени всех вершин не меньше 2, то эти две компоненты являются циклами длины 3, и значит, изоморфны. Следовательно, Даня ошибся. Получается, что кто-то из двоих - Аня или Даня соврал. А, значит, все остальные сказали правду.

Поскольку в компоненте с вершиной со степенью $\alpha_1 \geq 6$ не менее 7 вершин, то с учетом оценки $\alpha_i \geq 2, i = 1, \dots, v$ получаем, что в этой компоненте ребер не меньше, чем $\frac{6+6 \cdot 2}{2} = 9$, тогда всего не менее 18 ребер (следует из информации Мани), и из условия Сани следует, с учетом $v \leq 13$, что $k \geq 5$ – а это невозможно, так как в каждой компоненте без висячих вершин и изолированных вершин не менее трех вершин, и тогда всего не менее $7 + 4 \cdot 3 = 19$ вершин - противоречие с информацией Зины.

Единственно возможный граф Γ – изображен на рисунке в ответе.

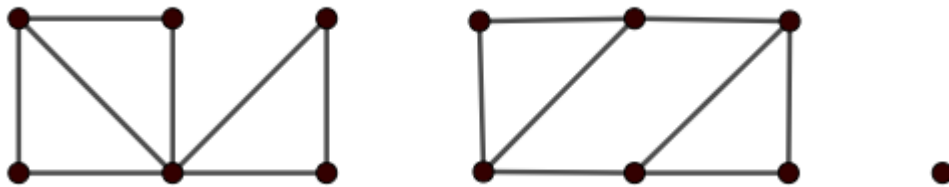
Заметим, что информация отдельных студентов оказалась не лишней в том смысле, что без неё Вася не смог бы однозначно определить граф. Это не относится к Зине, Лине и Нине – в этом случае теряется смысл фразы Фаины.

Действительно, если бы промолчал Саня, то по остальной информации кроме приведенного графа Γ мог бы быть и такой граф G



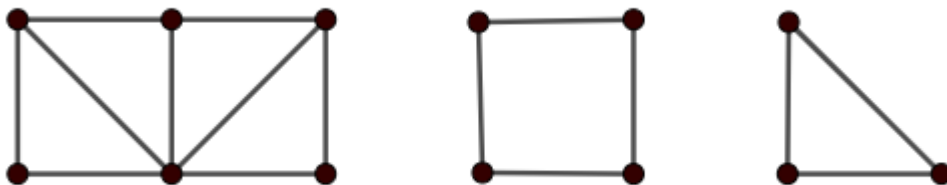
с характеристиками $v = 13, e = 14, k = 3$. И Вася не смог бы однозначно определить граф.

Пусть промолчал Ваня, тогда кроме приведенного графа Γ мог бы быть и такой



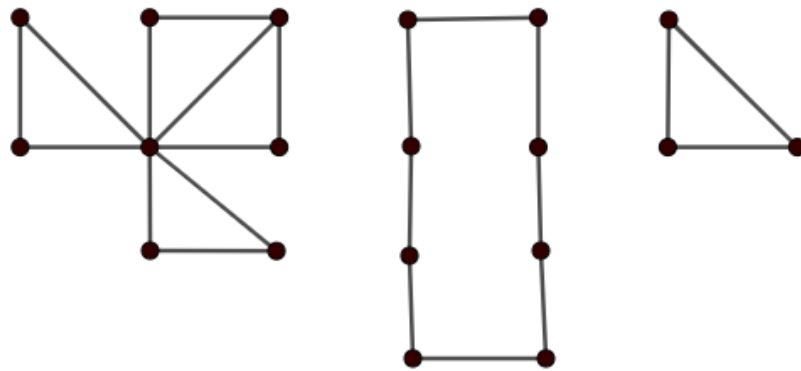
с характеристиками $v = 13, e = 16, k = 3$. И в этом случае Вася не смог бы однозначно определить граф.

Пусть промолчала Маня, тогда кроме приведенного графа Γ мог бы быть и такой граф Z



с характеристиками $v = 13, e = 16, k = 3$. И в этом случае Вася не смог бы однозначно определить граф.

Пусть промолчала Фаина, тогда кроме приведенного графа Γ мог бы быть и такой



с характеристиками $v = 19, e = 22, k = 3$. И в этом случае Вася не смог бы однозначно определить граф.

Пусть промолчала Таня, тогда мог быть и граф G и граф Z . И в этом случае Вася не смог бы однозначно определить граф.