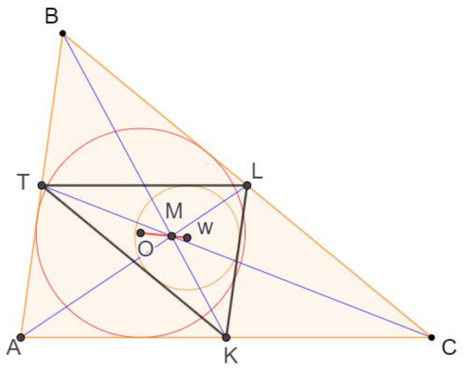
ММ 262 (5 баллов)

Ответ: Доказано утверждение задачи.

Найден и другой критерий того, что треугольник является прогрессивным, в терминах прямой, проходящей через точку Нагеля и центр Шпикера.

Решение:



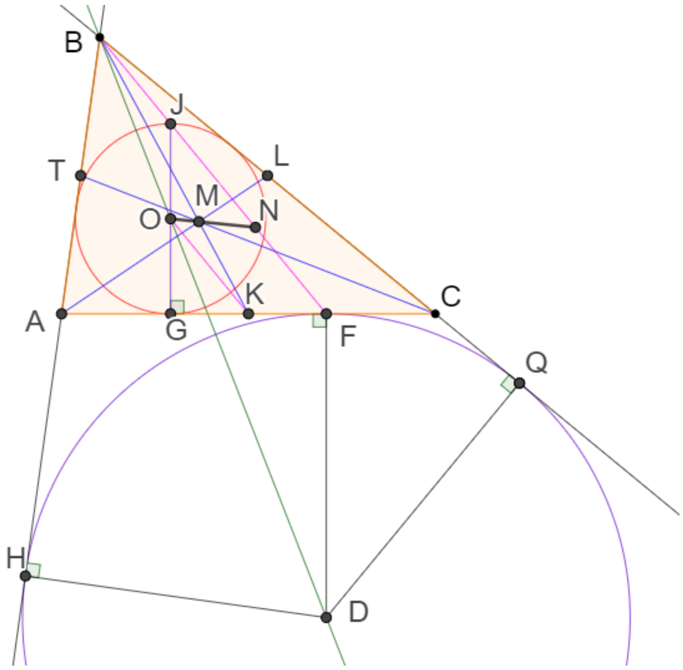
Здесь и далее рассматриваем разносторонний треугольник ABC.

1)Пусть в треугольнике ABC проведены медианы AL, BK, CT, которые пересекаются в точке M, а точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.

Рассмотрим гомотетию с центром в точке M и коэффициентом $-1/2$.

Поскольку точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $2:1$ считая от вершины, то вершины A, B, C при такой гомотетии переходят в точки L, K, T, а центр вписанной окружности O переходит в центр вписанной окружности треугольника KLT – точку W, являющуюся центром Шпикера треугольника ABC. Понятно, что центр гомотетии, образ и прообраз лежат на одной прямой.

Значит, **точки $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{W}$ лежат на одной прямой**. Кроме того, $OM: MW = 2: 1$.



2)Пусть вневписанная окружность с центром D касается стороны AC, лучей BA, BC в точках F, H, Q соответственно, а вписанная окружность касается стороны AC в точке G. Следующие пары отрезков равны, как отрезки касательных, проведенных из одной точки

$$BH = BQ, AH = AF, CF = CQ.$$

А так как

$$AG = (AB + AC - BC)/2$$

то

$$CF = CQ = BQ - BC = BH - BC = AB + AH - BC = AB + AF - BC$$
$$= AB + AC - CF - BC.$$

Поэтому $2CF = AB + AC - BC$, и $CF = (AB + AC - BC)/2$

Получаем $CF = AG$, а затем $KG = AK - AG = KC - CF = KF$, так что точка K является серединой отрезка GF.

Гомотетия с центром в точке B, переводящая вневписанную окружность во вписанную окружность, переводит центр D в центр O, а радиус DF в параллельный ему радиус OJ. Но DF параллелен OG. Значит, отрезок BF пересекает вписанную окружность в точке J, являющуюся вместе с точкой G концами одного диаметра GJ.

Получается, что OK – средняя линия в треугольнике GJF, поэтому отрезок OK параллелен отрезку BF.

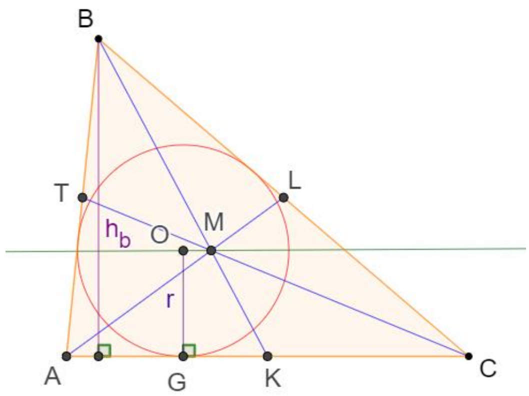
Гомотетия с центром в точке M и коэффициентом -2 переводит точку K в точку B, а луч KO в параллельный ему луч BF, и точку O в некоторую точку N на луче BF, которая, понятно, принадлежит прямой OM.

Те же соображения, примененные к конфигурации, привязанной к вершине А, приводят к тому, что точка N также принадлежит и отрезку, соединяющему вершину A и точку касания вневписанной окружности стороны BC. Аналогично, точка N также принадлежит и отрезку, соединяющему вершину C и точку касания вневписанной окружности стороны AB.

Значит, N – точка Нагеля, и, как отмечено, **точки $\boldsymbol{O, M, N}$ лежат на одной прямой**. Кроме того, $OM:MN = 1:2$.

Получается, что **все четыре точки $\boldsymbol{O, M, N, W}$ лежат на одной прямой.**

В рассматриваемой задаче мы будем использовать только тот факт, что эта прямая проходит через точки O, M.



3)Пусть треугольник ABC прогрессивный, и $2AC = AB + BC$.

Поскольку

$$S_{ABC} = \frac{(AB + BC + AC)r}{2} = \frac{(2AC + AC)r}{2} = \frac{3AC \cdot r}{2},$$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot h_b}{2},$$

то $\frac{3AC\cdot r}{2}=\frac{AC\cdot h_b}{2}\Rightarrow r=\frac{h_b}{3}$, здесь r —радиус вписанной окружности, · h_b —высота, проведенная из вершины B. Поэтому прямая, проходящая через точку O, и которая параллельна стороне AC, пересекает медиану BK в точке, которая делит эту медиану в отношении $2:1$ считая от вершины, то есть в точке M.

Как было показано, эта прямая также проходит и через точки N, W. Таким образом доказано, что прямая, проходящая через точки O, M, N, W, параллельна стороне AC.

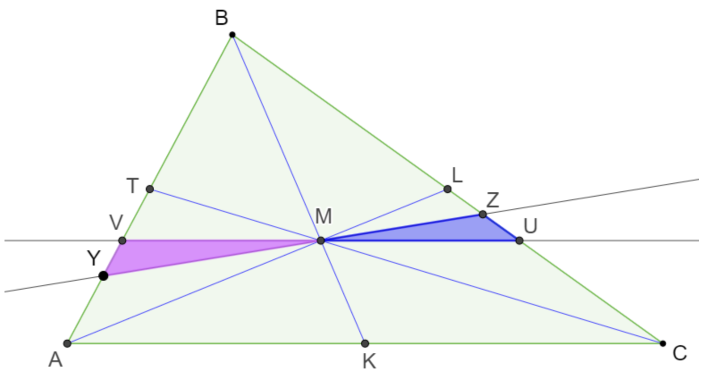
4)*В обратную сторону.* Пусть прямая, проходящая через точки O, M, N, W, параллельна стороне AC. Так как она проходит через точку пересечения медиан и делит медиану BK в отношении $2:1$ считая от вершины, то по теореме Фалеса, эта прямая делит и высоту h_b в отношении $2:1$ считая от вершины. Значит, $r=\frac{h_b}{3}$, и потому $S_{ABC}=\frac{AC\cdot h_b}{2}=\frac{3AC\cdot r}{2}$. И поскольку $S_{ABC}=\frac{(AB+BC+AC)r}{2}$, то получаем $3AC=AB+BC+AC\Rightarrow AC=\frac{AB+BC}{2}$. И треугольник ABC – прогрессивный. Кроме того, AC – средняя по длине.

Что и требовалось.

Треугольник является прогрессивным тогда и только тогда, когда прямая, проходящая через точку Нагеля и центр Шпикера, делит треугольник на треугольник и четырехугольник, площади которых относятся как 4:5.

1)Пусть треугольник ABC прогрессивный (пусть AC – средняя по длине сторона). Как показано при решении исходной задачи, в этом случае прямая, проходящая через точку Нагеля и центр Шпикера, параллельна средней стороне AC. Так что отсекаемый этой прямой треугольник подобен исходному с коэффициентом, равным отношению, например, соответствующих медиан $k=\frac{BM}{BK}=\frac{2}{3}$. И поскольку $k^2=\frac{4}{9}$, то отсекаемый треугольник имеет площадь, составляющую $\frac{4}{9}$ от площади треугольника ABC. А на оставшийся четырехугольник приходится $\frac{5}{9}$ от площади треугольника ABC. $\frac{4}{9}:\frac{5}{9}=4:5$. Получается то, что было нужно доказать.

2) Пусть теперь прямая l, проходящая через точку Нагеля и центр Шпикера, делит треугольник на треугольник и четырехугольник, площади которых относятся как 4:5. Понято, что прямая проходит через точку пересечения медиан M. Прямая VU, параллельная стороне AC, отсекает треугольник с площадью, составляющей $\frac{4}{9}$ от площади всего треугольника ABC. Пусть теперь прямая проходит через точку M и не параллельна стороне треугольника AC и не пересекает её, и при этом отсекает треугольник YBZ. Предположим, площади треугольники YBZ и VBU равны. Тогда треугольники YVM и ZUM также равновелики, и тогда, с учетом равенства отрезков VM и MU, а также равенства углов VMY и UMZ, следует равенство отрезков YM и MZ. Получается, что треугольники YMV и ZMU конгруэнтны, и тогда прямые VY и ZU параллельны, что не возможно.



Так что прямая l параллельна какой-то стороне треугольника. Но мы уже знаем (как следует из доказанного утверждения задачи), что в этом случае треугольник прогрессивен (и она параллельна именно средней по длине стороне). Доказано.