MM 263 (5 баллов)

Ответ: Количество решений может быть либо бесконечным либо принимать одно из значений 0,1,2.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = \lfloor 3x \rfloor \{x\} - \lfloor x \rfloor \{3x\}$ и для неё несколько случаев:

1)$n \le x < n + \frac{1}{3}$

$3n \le 3x < 3n + 1$

$\lfloor x \rfloor = n, \{x\} = x - n, \lfloor 3x \rfloor = 3n, \{3x\} = 3x - 3n,$

$f(x) = 3n(x - n) - n(3x - 3n) = 0$

2)$n + \frac{1}{3} \le x < n + \frac{2}{3}$

$3n + 1 \le 3x < 3n + 2$

$\lfloor x \rfloor = n, \{x\} = x - n, \lfloor 3x \rfloor = 3n + 1, \{3x\} = 3x - 3n - 1,$

$f(x) = (3n + 1)(x - n) - n(3x - 3n - 1) = x$

3) $n + \dfrac{2}{3} \le x < n + 1$

$3n + 2 \le 3x < 3n + 3$

$\lfloor x \rfloor = n, \{x\} = x - n, \lfloor 3x \rfloor = 3n + 2, \{3x\} = 3x - 3n - 2,$

$f(x) = (3n + 2)(x - n) - n(3x - 3n - 2) = 2x.$

Так что функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, n \le x < n + \dfrac{1}{3}, \\ x, n + \dfrac{1}{3} \le x < n + \dfrac{2}{3}, \\ 2x, n + \dfrac{2}{3} \le x < n + 1, n \in Z \end{cases}$$

Пусть

$A_0 = \bigcup_{n \in Z} \left[n, n + \frac{1}{3}\right), A_1 = \bigcup_{n \in Z} \left[n + \frac{1}{3}, n + \frac{2}{3}\right), A_2 = \bigcup_{n \in Z} \left[n + \frac{2}{3}, n + 1\right).$

Функция $f(x)$ принимает значение 0 только при $x \in A_0$. Поэтому решения уравнения $f(x) = 0$ образуют множество A_0.

На множестве A_1 функция $f(x) = x$ монотонно возрастает.

Поэтому при каждом значении $C \in f(A_1) = \cup_{n\in Z}\left[n + \frac{1}{3}, n + \frac{2}{3}\right)$ уравнение $f(x) = C$ на множестве A_1 имеет ровно одно решение $x = C$.

На множестве A_2 функция $f(x) = 2x$ монотонно возрастает.

Поэтому при каждом значении $C \in f(A_2) = \cup_{n\in Z}\left[2n + \frac{4}{3}, 2n + 2\right)$ уравнение $f(x) = C$ на множестве A_2 имеет ровно одно решение $x = \frac{C}{2}$.

1) $C \in f(A_1) \cap f(A_2) = \cup_{n\in Z}\left[2n + \frac{4}{3}, 2n + \frac{5}{3}\right) \Rightarrow x = C, \frac{C}{2}$

2) $C \in f(A_1) \backslash f(A_2) = \cup_{n\in Z}\left[2n + \frac{1}{3}, 2n + \frac{2}{3}\right) \Rightarrow x = C$

3) $C \in f(A_2) \backslash f(A_1) = \cup_{n\in Z}\left[2n + \frac{5}{3}, 2n + 2\right) \Rightarrow x = \frac{C}{2}$

4) $C \in R \backslash \left(\{0\} \cup f(A_1) \cup f(A_2)\right) = \cup_{n\in Z}\left(\left[2n, 2n + \frac{1}{3}\right) \cup \left[2n + \frac{2}{3}, 2n + \frac{4}{3}\right)\right) \backslash \{0\} \Rightarrow x \in \emptyset$

Окончательный ответ:

Уравнение $f(x) = C$

имеет бесконечное множество корней при $C = 0$;

имеет ровно два корня при $C \in \cup_{n\in Z}\left[2n + \frac{4}{3}, 2n + \frac{5}{3}\right)$;

имеет ровно одно корень при $C \in \cup_{n\in Z}\left(\left[2n + \frac{1}{3}, 2n + \frac{2}{3}\right) \cup \left[2n + \frac{5}{3}, 2n + 2\right)\right)$;

не имеет ни одного корня при $C \in \cup_{n\in Z}\left(\left[2n, 2n + \frac{1}{3}\right) \cup \left[2n + \frac{2}{3}, 2n + \frac{4}{3}\right)\right) \backslash \{0\}$.

Рассмотрим уравнение $\lfloor mx \rfloor \{x\} - \lfloor x \rfloor \{mx\} = C, m \in N$.

Введем функцию $f(x) = \lfloor mx \rfloor \{x\} - \lfloor x \rfloor \{mx\}$

Проводим аналогичный анализ:

$$r = 0,1, \dots, m - 1$$

$$n + \frac{r}{m} \le x < n + \frac{r+1}{m}$$

$$mn + r \le mx < mn + r + 1$$

$$\lfloor x \rfloor = n, \{x\} = x - n, \lfloor mx \rfloor = mn + r, \{mx\} = mx - mn - r,$$

$$f(x) = (mn + r)(x - n) - n(mx - mn - r) = rx$$

Получается, что при $r = 0,1, \dots, m - 1$ на каждом из множеств

$$A_r = \bigcup_{n \in Z} \left[n + \frac{r}{m}, n + \frac{r+1}{m} \right)$$

функция $f(x) = rx$.

1) Функция $f(x)$ принимает значение 0 только при $x \in A_0$. Поэтому решения уравнения $f(x) = 0$ образуют множество A_0 (состоящее из бесконечного числа точек на числовой прямой).

2) $r = 1, \dots, m - 1$.

На множестве A_r функция $f(x) = rx$ монотонно возрастает.

Поэтому при каждом значении $C \in f(A_r) = \bigcup_{n \in Z} \left[rn + \frac{r^2}{m}, rn + \frac{r(r+1)}{m} \right)$ уравнение $f(x) = C$ на множестве A_r имеет ровно одно решение $x = \frac{C}{r}$.

Таким образом, при $C \ne 0$ уравнение имеет не более, чем $(m - 1)$ корней.

При каждом $m = 2,3, \dots, 17$ найдено максимальное количество корней M_m.

Оказывается, что всевозможные значения пробегают все натуральные числа до M_m

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
M_m	1	2	3	4	4	4	5	6	5	5	6	6	7	8	7	7

```
restart:for b from 2 to 17 do d:=1:for j to b-1 do d:=ilcm(d,j):od:d1:=d*b:a:=array(1..d1-1):
for s to d1-1 do a[s]:=0:od:
for r from 2 to b do
for t from 0 to d/(r-1)-1 do
for j from (r-1)^2 to r*(r-1)-1 do u:=b*((r-1)*t+j/b):a[u]:=a[u]+1:od:od:od:ss:={}:for s to d1-1 do ss:=ss
union({a[s]}):od:print(b,ss):od:
```

$$2, \{1\}$$
$$3, \{0, 1, 2\}$$
$$4, \{0, 1, 2, 3\}$$
$$5, \{0, 1, 2, 3\}$$
$$6, \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$7, \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$8, \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$9, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$10, \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$11, \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$12, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$13, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$14, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$15, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$16, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$17, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$