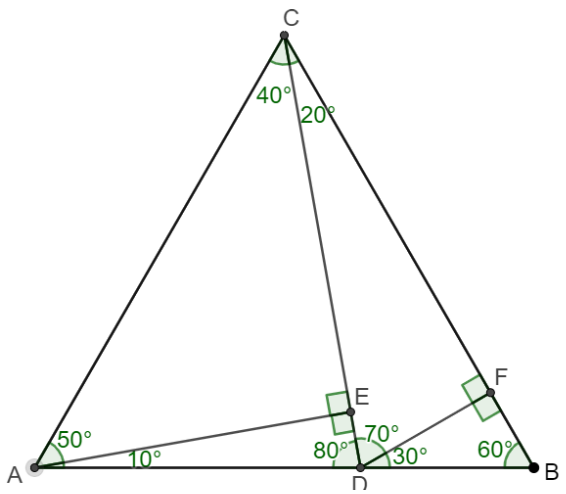
ММ 265 (5 баллов)

Ответ: 4.

Найдены возможные количества прямоугольных треугольников, попарно неподобных между собой, возникающие при разбиении произвольного треугольника.

Решение:

На рисунке показан способ разрезания правильного треугольника на 4 прямоугольных треугольников с наименьшими острыми углами $10, 20, 30, 40$ градусов.




Предположим, треугольник разрезан на $n = 2$ или $n = 3$ неподобных между собой прямоугольных треугольников. Те вершины $A_k$ образованных треугольников, которые не совпадают с вершинами исходного треугольника, лежат либо внутри (i) либо на сторонах (ii) исходного треугольника.

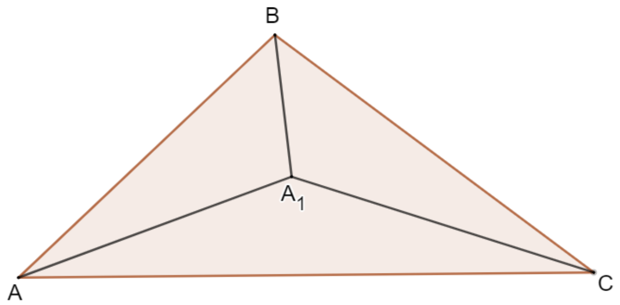
i)В этом случае сумма углов треугольников с вершиной в точке $A_k$ равна $180$ или $360$ градусов.

ii)В этом случае сумма углов треугольников с вершиной в точке $A_k$ равна $180$ градусов.

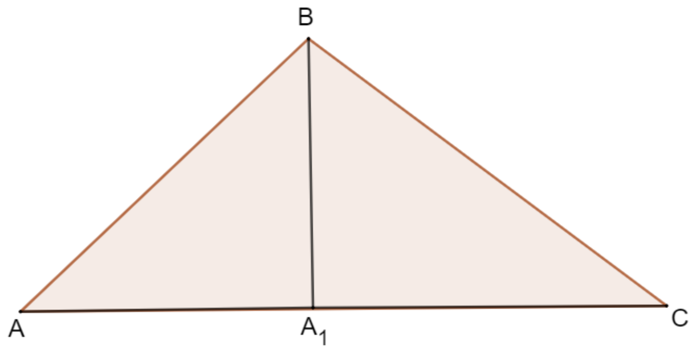
Так как сумма всех углов образованных треугольников равна $180n$ градусов, то получается, что всего точек $A_k$ может быть не больше двух.

Следующие рассмотрения мы проведем для произвольного исходного треугольника.

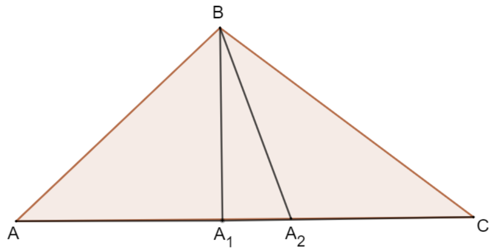
1)Единственная точка $A_1$ лежит внутри треугольника. Поскольку сумма трех углов с вершиной в точке $A_1$ равна 360 градусов, то по крайней мере один из этих углов не меньше 120 градусов, и, следовательно, тупой. А нас интересуют разбиения именно на прямоугольные треугольники. **Этот случай не возможен.**



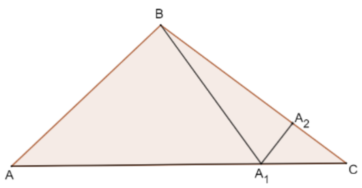

2)Единственная точка $A_1$ лежит на стороне треугольника, например, на стороне $AC$. А поскольку сумма двух углов с вершиной в точке $A_1$ равен 180 градусов, и каждый из них не больше, чем по 90 градусов, то оба угла прямые. Понятно, что углы $\angle A, \angle C$ острые. И тогда образованные прямоугольные треугольники не подобны, только если $\angle A \neq \angle C$ и $\angle A + \angle C \neq 90^0$ . Тогда треугольник $ABC$ не является прямоугольным и, кроме того, $AB \neq BC$ .

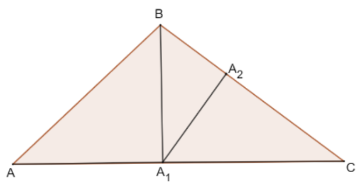


3)Две точки $A_1, A_2$ лежат на одной стороне. По крайней мере, один из отрезков $BA_1, BA_2$ является наклонной, и тогда один из углов со стороной, являющейся этой наклонной, - тупой. **Этот случай не возможен**.

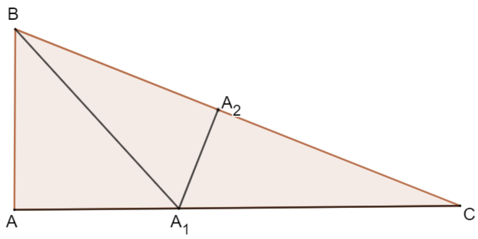



4) Две точки $A_1, A_2$ лежат на разных сторонах, например, на $AC$ и $BC$ соответственно. Понятно, что при разбиении на треугольники эти точки получаются соединенными отрезком. Тогда возможны три случая. В первом случае угол $ABA_1$ прямой. Тогда угол $ABC$ тупой, $\angle A \neq \angle C$. И так как $\angle C \neq \angle A_1BC$ , то $\angle A + 2\angle C \neq 90$. И так как $\angle A \neq \angle A_1BC$, то $2\angle A + \angle C \neq 90$. Получается, что должно выполнятся условие $\angle B - 90 \neq \angle A, \angle C$



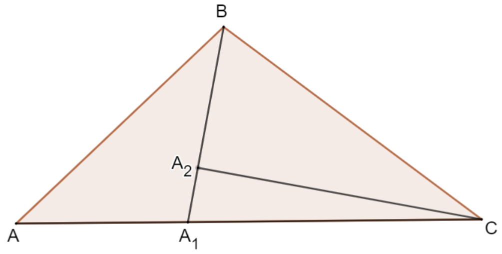




Во втором случае угол $AA_1B$ прямой. Тогда прямоугольные треугольники $A_1BA_2, A_1CA_2$ подобны**. Этот случай невозможен.**




Во третьем случае угол $BAA_1$ прямой. Малым шевелением точки $A_1$ можно добиться, чтобы полученные три прямоугольных треугольника были попарно не подобны между собой.

5)Одна точка внутри треугольника, а другая на стороне, например, $AC$. Тогда получается следующая конфигурация, при которой угол $CA_2A_1$ прямой, тогда угол $CA_1A_2$острый, а угол $BA_1A$ тупой. **Эта конфигурация не возможна.**




Таким образом, возможны только конфигурации в случаях 2), 4.1), 4.3).

Заметим, что эти конфигурации для правильного треугольника не возможны. Действительно,

в случае 2) оба треугольника $BA_1A$ , $BA_1C$ оказываются равными;

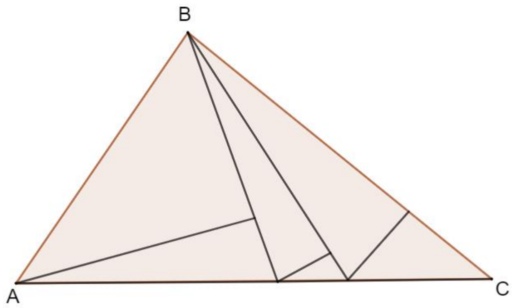
в случае 4.1) исходный треугольник должен быть тупоугольным, понятно, что правильный треугольник таковым не является;

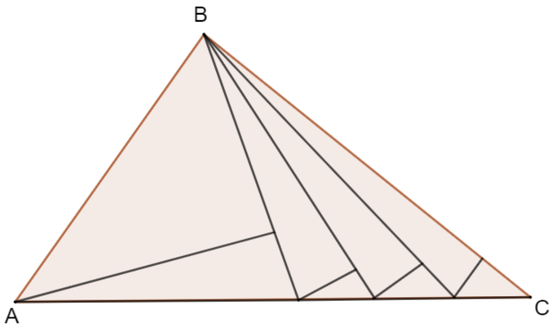
в случае 4.3) исходный треугольник должен быть прямоугольным, понятно, что правильный треугольник таковым не является.

Мы доказали, что **невозможно правильный треугольник разбить на два или на три прямоугольных треугольников, попарно не подобных между собой.**

**Изучим вопрос о количестве $n$ попарно неподобных треугольников, возникающих при разбиении произвольного треугольника.**

Пусть углы при вершинах $A, C$ острые. Тогда такая процедура позволяет

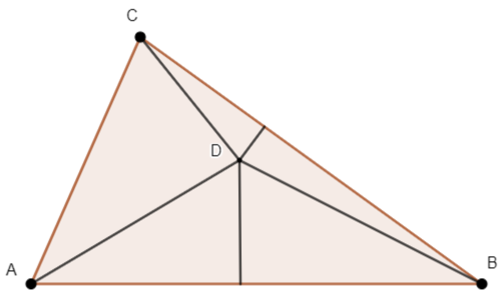


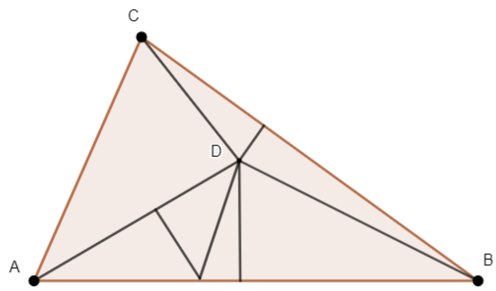



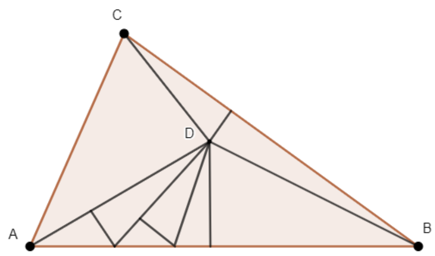
получить разбиения на $2s$ прямоугольных треугольников при каждом $s \geq 2$.

А малым шевелением точек на сторонах можно добиться того, чтобы полученные прямоугольные треугольники не были подобны.

Пусть угол при вершине $B$ острый. Выбираем точку $D$ внутри треугольника такую, чтобы угол $ADC$ был прямым. Тогда следующая процедура построения позволяет получить разбиения на $2s+1$ прямоугольных треугольников при каждом $s \geq 2$. А малым шевелением точки $D$ и точек на отрезках $AB, AD$ можно добиться того, чтобы полученные прямоугольные треугольники не были подобны.




Понятно, что в любом треугольнике можно найти два острых угла. Поэтому при любом $n \geq 4$ произвольный треугольник можно разбить на $n$ прямоугольных треугольников, попарно не подобных между собой.

Пусть $n = 2$. Проведенный анализ в п.2) дает возможность разбить треугольник на два прямоугольных не подобных треугольника только в случае, если исходный треугольник не является правильным, прямоугольным или равнобедренным тупоугольным.

Пусть $n = 3$.

Проведенный анализ в п. 4.3) дает возможность разбить произвольный прямоугольный треугольник на три прямоугольных попарно неподобных треугольников.

Если в п. 4.1) угол $ABC$ тупой, $\angle A \neq \angle C$, и $\angle B - 90 \neq \angle A, \angle C$, тогда удастся разбить такой тупоугольный неравнобедренный треугольник на три прямоугольных попарно неподобных треугольников.

Суммируем:

**для правильного треугольника и равнобедренного тупоугольного треугольника $\boldsymbol{n \geq 4}$,**

**для прямоугольного треугольника $\boldsymbol{n \geq 3}$,**

**для неравнобедренного тупоугольного треугольника, для которого не найдется двух углов, отличающихся на 90 градусов $\boldsymbol{n \geq 2}$,**

**для остроугольного не правильного треугольника и для неравнобедренного тупоугольного треугольника с двумя углами, отличающимися на 90 градусов $\boldsymbol{n = 2, n \geq 4}$**